برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی نیمه معین در ترکیبیات و علوم کامپیوتر

سلمان ابوالفتح بیگی

پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

پاییز ۱۳۹۳

بهینه‌سازی نیمه معین فرم خاصی از بهینه‌سازی محدب است که کاربرد آن در ترکیبیات و علوم کامپیوتر در سال‌های اخیر بسیار موفق بوده است. در سال ۱۹۷۹ لواز[۱] با استفاده از برنامه‌ریزی نیمه‌معین کران بالایی برای ظرفیت شانون[۲] گراف‌ها بدست آورد و به وسیله آن ظرفیت دور به طول پنج را محاسبه کرد. همچنین گومنز[۳] و ویلیامسون[۴] در سال ۱۹۹۵ با استفاده از برنامه‌ریزی نیمه معین، الگوریتمی برای مسأله MAXCUT طراحی کردند که برش بیشینه[۵] یک گراف را با تقریب 0.8785 در زمان چندجمله‌ای محاسبه می‌کند. این دو جزء اولین و مهم‌ترین نتایجی هستند که بهینه‌سازی نیمه‌معین در حل آنها بسیار مفید بوده است. در دو دهه گذشته برنامه‌ریزی نیمه‌معین به یکی از مهم‌ترین ابزارها در بهینه‌سازی ترکیبیاتی و الگوریتم‌های تقریبی تبدیل شده است. هدف از این درسنامه آشنایی کلی با این ابزار است.

این درسنامه شامل مروری کلی بر تعاریف و قضای مهم در برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی نیمه معین و همچنین کاربرد آنها در ترکیبیات و علوم کامپیوتر است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مقاله لواز [۱] مراجعه کنید. منابع بسیار خوب دیگر در این زمینه شامل کتاب‌های [۲، ۳، ۴، ۵] هستند که هم جنبه‌های الگوریتمی و هم جنبه‌های ترکیبیاتی این مبحث را توضیح می‌دهند.

فهرست مطالب

[۱] Lovász

[۲] Shannon capacity

[۳] Goemans

[۴] Williamson

[۵] Maximum cut

۱ برنامه‌ریزی خطی

مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ و مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در اینجا فضاهای برداری، ماتریس‌ها و بردارها معمولاً روی اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شوند. منظور از $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ برداری ستونی است که مؤلفه‌های آن را با $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{v}^t$ برداری سطری برابر ترانهاده $\mathbf{v}$ است. ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ را با $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^t \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

طول بردار $\mathbf{v}$ برابر است با

$$\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2}.$$

بردار صفر برداری است که همه مؤلفه‌های آن برابر صفر هستند و آن را با $0 \in \mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ را برداری می‌گیریم که همه مؤلفه‌های آن 1 هستند.

فضای ماتریس‌های $m \times n$ را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ نشان می‌دهیم و درایه‌های ماتریس $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با x_{ij} نمایش داده می‌شوند. همچنین X^t ترانهاده ماتریس X است. ماتریس همانی را با I نمایش می‌دهیم. روی فضای ماتریس‌ها نیز می‌توان ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت[۶] را در نظر گرفت:

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^tY) = \sum_{i,j} x_{ij}y_{ij}.$$

$E_{ij} \in R^{m\times n}$ را ماتریسی می‌گیریم که درایه ij-ام آن 1 و بقیه درایه‌های آن صفر باشند. در این صورت E_{ij}-ها یک پایه متعامد یکه با ضرب داخلی فوق، برای $\mathbb{R}^{m\times n}$ تشکیل می‌دهند.

برای بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $\mathbf{v} \geq 0$ اگر همه مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ نامنفی باشند، یعنی $v_i \geq 0$ برای هر i. همچنین می‌نویسیم $\mathbf{v} \geq \mathbf{w}$ اگر $\mathbf{v} - \mathbf{w} \geq 0$.

۱.۱ مجموعه‌های محدب

زیرمجموعه $K \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب[۷] گوییم اگر برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda\mathbf{y}) \in K$. همچنین K را یک مخروط[۸] گوییم اگر برای هر $\mathbf{x} \in K$ و هر $\lambda > 0$ داشته باشیم $\lambda\mathbf{x} \in K$. اگر K هم محدب و هم مخروط باشد به آن یک مخروط محدب[۹] گوییم.

نقطه $\mathbf{x} \in K$ را یک نقطه رأسی یا حدی[۱۰] مجموعه محدب K گویند اگر هرگاه داشته باشیم $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in K$ و $0 < \lambda < 1$ به طوری که $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$ آنگاه بتوانیم نتیجه بگیریم که $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

مثال ۱.۱ قرار دهید $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1|, |x_2| \leq 1\}$. در این صورت K یک مجموعه محدب است، و نقاط رأسی K چهار نقطه $(\pm 1, \pm 1)$ هستند. همچنین $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq 0\}$ یک مخروط محدب است و 0 تنها نقطه رأسی آن است.

یکی از ابزارهای مهم در مطالعه مجموعه‌های محدب قضیه هان-باناخ[۱۱] است.

قضیه ۲.۱ (قضیه هان-باناخ) فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب و بسته باشد و $\mathbf{x} \notin K$. آنگاه $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که $\mathbf{b}^t\mathbf{x} < c$ و برای هر $\mathbf{y} \in K$ داشته باشیم $\mathbf{b}^t\mathbf{y} \geq c$. همچنین اگر K یک مخروط محدب باشد آنگاه $c = 0$.

همان طور که در ادامه خواهیم دید نقاط رأسی یک مجموعه محدب نقش مهمی در برنامه‌ریزی خطی و نیمه معین دارند. در واقع با استفاده از قضیه هان-باناخ می‌توان نشان داد که هر مجموعه محدب و فشرده K از پوش محدب[۱۲] نقاط رأسی آن بدست می‌آید. منظور از پوش محدب مجموعه‌ای از نقاط، کوچکترین مجموعه محدبی است که شامل آن نقاط باشد. نتیجه این که هر مجموعه محدب و فشرده حداقل یک نقطه رأسی دارد.

[۶] Hilbert-Schmidt inner product
[۷] Convex
[۸] Cone
[۹] Convex cone
[۱۰] Extreme point
[۱۱] Hahn-Banach theorem
[۱۲] Convex hull

۲.۱ تعریف برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی مسأله بهینه‌سازی یک تابع هدف[۱۳] خطی با قیدها یا محدویت‌های خطی است. فرم کلی یک برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$(LP) \quad \max \quad \mathbf{c}^t\mathbf{x} \qquad (۱)$$
$$\mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \leq b_1,$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{a}_m^t\mathbf{x} \leq b_m,$$

که در آن $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ و $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ است و بهینه‌سازی روی بردارهای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ انجام می‌شود.

در یک برنامه‌ریزی خطی ممکن است قیدهای به فرم $\mathbf{a}^t\mathbf{x} \geq b$ نیز وجود داشته باشد. با این حال توجه کنید که نامساوی $\mathbf{a}^t\mathbf{x} \geq b$ را می‌توان به فرم $(-\mathbf{a})^t\mathbf{x} \leq (-b)$ نوشت. همچنین اگر بعضی از قیدها به صورت تساوی $\mathbf{a}^t\mathbf{x} = b$ باشند، می‌توان آنها را با دو نامساوی $\mathbf{a}^t\mathbf{x} \leq b$ و $\mathbf{a}^t\mathbf{x} \geq b$ جایگزین کرد. نکته دیگر این که اگر برنامه‌ریزی خطی ما یک مسأله کمینه‌سازی[۱۴] باشد می‌توان آن را به یک مسأله بیشینه‌سازی[۱۵] تبدیل کرد؛ کافی است تابع هدف را با منفی آن جایگزین کنیم. نتیجه این که (۱) کلی‌ترین فرم یک برنامه‌ریزی خطی است و هر مسأله بهینه‌سازی خطی را می‌توان با این فرم نوشت.

با قرار دادن بردارهای $\mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_m^t$ در سطرهای یک ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ مسأله (۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

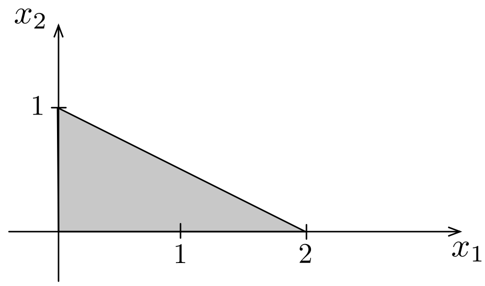
$$(LP) \quad \max \quad \mathbf{c}^t\mathbf{x} \qquad (۲)$$
$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

مجموعه بردارها (نقاط) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ که در $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ صدق می‌کنند را ناحیه شدنی[۱۶] گویند. در حالت کلی ناحیه شدنی ممکن است تهی یا ناتهی باشد. در حالت اول برنامه‌ریزی خطی را شدنی[۱۷] و در حالت دوم آن را ناشدنی[۱۸] گویند. همچنین ناحیه شدنی ممکن است کران‌دار یا بی‌کران باشد که در حالت اول مسأله بهینه‌سازی را کران‌دار و در حالت دوم آن را بی‌کران گوییم.

مثال ۳.۱ بهینه‌سازی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max \quad x_1 + x_2 \qquad (۳)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

[۱۳] Objective function
[۱۴] Minimization
[۱۵] Maximization
[۱۶] Feasible region
[۱۷] Feasible
[۱۸] Infeasible



شکل ۱: ناحیه شدنی برنامه ریزی خطی (۳). این ناحیه یک مثلث است که هر یک از اضلاع آن توسط یکی از نامساوی‌های $x_1 \geq 0$، $x_2 \geq 0$ و $x_1 + 2x_2 \leq 2$ داده می‌شود.

برای نوشتن این برنامه‌ریزی خطی به فرم (۲) کافی است قرار دهیم

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{۴}$$

مجموعه نقاط شدنی $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ در شکل ۱ زیر نمایش داده شده است. توجه کنید این مسأله شدنی و کران‌دار است. جواب این بهینه‌سازی برابر 2 است زیرا $(x_1, x_2) = (2, 0)$ یک نقطه شدنی است، و همچنین با استفاده از نامنفی بودن x_2 داریم

$$x_1 + x_2 \leq x_1 + 2x_2 \leq 2.$$

ناحیه شدنی یک برنامه‌ریزی خطی همواره محدب است. در واقع این ناحیه شدنی، فرم خاصی از مجموعه محدب دارد که محدوده آن به وسیله تعدادی ابرصفحه[۱۹] مشخص می‌شود. برای مثال در شکل ۱ ناحیه شدنی بوسلیه ابرصفحه‌های $x_1 = 0$، $x_2 = 0$ و $x_1 + 2x_2 = 2$ مشخص می‌شود. چنین مجموعه محدبی را چندبر یا چند سقفی[۲۰] گویند.

همچنین توجه کنید که مجموعه نقاط بهینه[۲۱] یک برنامه‌ریزی خطی، یعنی نقاط شدنی که تابع هدف را بیشینه می‌کنند، همواره شامل نقاط رأسی چندبر شدنی هستند. برای اثبات این ادعا کافی است توجه کنیم که اگر $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ شدنی باشند و $0 < \lambda < 1$ به طوری که $\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{x}_3$ آنگاه داریم

$$\mathbf{c}^t\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{c}^t\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{c}^t\mathbf{x}_3 \leq \max\{\mathbf{c}^t\mathbf{x}_2, \mathbf{c}^t\mathbf{x}_3\}.$$

برای مثال دیدیم که نقطه بهینه (۳) نقطه $(x_1, x_2) = (2, 0)$ است که یک نقطه رأسی ناحیه شدنی است.

تمرین ۴.۱ برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم (۲) بنویسید و آن را حل کنید. همچنین مجموعه نقاط شدنی و بهینه آن را بدست بیاورید و تحقیق کنید که این برنامه‌ریزی خطی یک نقطه بهینه دارد که رأسی است.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 4x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

[۱۹] Hyperplane
[۲۰] Polytope
[۲۱] Optimal points

۳.۱ روش حذف فوریه-موتزکین

فرض کنید $\mathbf{c} = 0$. در این صورت جواب مسأله (۱) برابر است با 0 است اگر مجموعه قیدهای $\mathbf{a}_i^t\mathbf{x} \le b_i$ شدنی باشند، یعنی $\mathbf{x} \in R^n$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{a}_i^t\mathbf{x} \le b_i$ برای هر i. اگر چنین $\mathbf{x}$-ای وجود نداشته باشد جواب بهینه برابر $-\infty$ است. بنابراین در این حالت خاص (وقتی $\mathbf{c} = 0$) مسأله بهینه‌سازی تبدیل به مسأله تشخیص تهی یا ناتهی بودن ناحیه شدنی می‌شود. چنین مسأله‌ای را مسأله شدنی- ناشدنی[۲۲] گویند.

حال مسأله (۱) را در حالت کلی در نظر بگیرید. فرض کنید که بخواهیم تشخیص دهیم که آیا جواب بهینه حداقل d است یا خیر. برای این کار باید مشخص کنیم که آیا $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ و همچنین $\mathbf{c}^t\mathbf{x} \ge d$ یا خیر؟ همان طور که می‌بینیم مسأله یافتن کرانی برای جواب یک برنامه‌ریزی خطی معادل با حل یک مسأله شدنی-ناشدنی است. بنابراین گرچه مسأله شدنی- ناشدنی حالت خاصی از برنامه‌ریزی خطی است، حل این حالت خاص (تقریباً) معادل حل مسأله در حالت کلی است.

برای حل یک مسأله بهینه‌سازی خطی می‌توان از روش حذف فوریه-موتزکین[۲۳] استفاده کرد. برای توضیح این روش با مسأله شدنی- ناشدنی (۱) با فرض $\mathbf{c} = 0$ شروع می‌کنیم. روش فوریه-موتزکین مبتنی است بر حذف متغیرها. برای مثال فرض کنید که بخواهیم متغیر x_n را در نامساوی‌های $\mathbf{a}_i^t\mathbf{x} \le b_i$ حذف کنیم. اگر قرار دهیم $\mathbf{a}_i^t = (\hat{\mathbf{a}}_i^t, a_{in})$ که در آن $\hat{\mathbf{a}}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$، آنگاه $\mathbf{a}_i^t\mathbf{x} \le b_i$ معادل است با

$$\hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}} + a_{in}x_n \le b_i$$

که در آن $\hat{\mathbf{x}}^t = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. این نامساوی‌ها با توجه به مثبت، منفی یا صفر بودن a_{in} به سه دسته تقسیم می‌شوند. برای این کار قرار دهید

$$\{1, 2, \ldots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-,$$

که در آن $I_0 = \{i : a_{in} = 0\}$ و $I_\pm = \{i : \pm a_{in} > 0\}$. پس نامساوی‌های $\mathbf{a}_i^t\mathbf{x} \le b_i$ معادلند با

$$\hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}} \le b_i, \quad \forall i \in I_0 \tag{۵}$$

$$x_n \le a_{in}^{-1}(b_i - \hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall i \in I_+ \tag{۶}$$

$$x_n \ge {a_{in}}^{-1}(b_i - \hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}}), \quad \forall i \in I_-. \tag{۷}$$

در نامساوی‌های دسته اول x_n ظاهر نمی‌شود. از طرف دیگر با استفاده از نامساوی‌های دسته دوم و سوم برای هر $i \in I_+$ و هر $j \in I_-$ داریم

$${a_{jn}}^{-1}(b_j - \hat{\mathbf{a}}_j^t\hat{\mathbf{x}}) \le x_n \le {a_{in}}^{-1}(b_i - \hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}}).$$

حال با حذف x_n به مسأله شدنی- ناشدنی زیر می‌رسیم.

$$\hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}} \le b_i, \quad \forall i \in I_0 \tag{۸}$$

$${a_{jn}}^{-1}(b_j - \hat{\mathbf{a}}_j^t\hat{\mathbf{x}}) \le {a_{in}}^{-1}(b_i - \hat{\mathbf{a}}_i^t\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall i \in I_+, j \in I_-. \tag{۹}$$

[۲۲] Feasibility problem
[۲۳] Fourier-Motzkin elimination

توجه کنید که اگر (۱) شدنی باشد آنگاه مسأله بالا نیز شدنی است. برعکس اگر $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ وجود داشته باشد که در نامساوی‌های (۸) و (۹) صدق کند، آنگاه می‌توانیم قرار دهیم

$$x_n = \min_{i \in I_+} a_{in}{}^{-1}(b_i - \hat{\mathbf{a}}_i^t \hat{\mathbf{x}}).$$

با چنین انتخاب x_n نامساوی‌های (۵)- (۷) برقرار خواهند بود. از آنجا که این سه نامساوی معادل با نامساوی‌های $\mathbf{a}_i^t \mathbf{x} \leq b_i$ بودند، شدنی بودن (۱) ثابت می‌شود.

نتیجه این که با استفاده از روش حذف فوریه-موتزکین برای حل یک مسأله شدنی- ناشدنی می‌توان متغیرها را یک به یک حذف کرد و در هر مرحل به مسأله‌ای معادل با مسأله اول رسید ولی با تعداد کمتری متغیر.

تمرین ۵.۱ برنامه‌ریزی خطی تمرین ۴.۱ را با استفاده از روش فوریه-موتزکین حل کنید.

توجه کنید که روش حذف فوریه-موتزکین فقط برای حل مسأله‌های با تعداد متغیر کم کاراست زیرا گرچه با این روش یکی از متغیرهای مسأله حذف می‌شود، تعداد زیادی قید اضافه می‌شود. برای اطلاع در مورد روش‌های دیگر حل برنامه‌ریزی‌های خطی مانند الگوریتم سیمپلکس،[۲۴] روش بیضوی،[۲۵] و روش نقطه داخلی[۲۶] به کتاب‌های مرجع ذکر شده مراجعه کنید. در اینجا نکته مهم برای ما این است که الگوریتم‌های بهینه یا کارایی[۲۷] (روش بیضوی و روش نقطه داخلی) برای حل برنامه‌ریزی خطی وجود دارد.

۴.۱ مسأله دوگان

مسأله (۲) را معمولاً مسأله اصلی یا اولیه[۲۸] گویند و دوگان[۲۹] متناظر با آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (LD) \quad \min \quad & \mathbf{b}^t \mathbf{y} \\ & A^t \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

دلیل تعریف مسأله دوگان مشاهده زیر است. فرض کنید $\mathbf{x}$ یک نقطه شدنی (LP) و $\mathbf{y}$ یک نقطه شدنی (LD) باشد. در این صورت داریم $\mathbf{y}^t A = \mathbf{c}^t$. در نتیجه $\mathbf{y}^t A \mathbf{x} = \mathbf{c}^t \mathbf{x}$. از طرف دیگر $\mathbf{y} \geq 0$ و $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. پس داریم

$$\mathbf{c}^t \mathbf{x} = \mathbf{y}^t A \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^t \mathbf{b} = \mathbf{b}^t \mathbf{y}.$$

سمت راست این نامساوی مقدار تابع هدف دوگان برای نقطه شدنی $\mathbf{y}$ و سمت چپ آن مقدار تابع هدف مسأله اولیه برای نقطه شدنی $\mathbf{x}$ است. بنابراین جواب مسأله (LD) کران بالایی برای جواب (LP) است. به این خاصیت، دوگانگی ضعیف[۳۰] می‌گویند.

[۲۴] Symplex algorithm
[۲۵] Ellipsoid method
[۲۶] Interior point method
[۲۷] Efficient
[۲۸] Primal
[۲۹] Dual
[۳۰] Weak duality

برای محاسبه مسأله دوگان لازم نیست حتماً آن را به فرم (۲) بنویسیم. به طور مستقیم می‌توان (LD) را می‌توان از روی (۱) بدست آورد. برای این کار به ازای هر یک از قیدهای (۱) یک متغیر y_i تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $y_i \geq 0$. به ازای هر $1 \leq i \leq m$ داریم $\mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \leq b_1$. بنابراین با توجه به نامنفی بودن y_i داریم

$$y_i\mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \leq y_ib_i.$$

با جمع کردن همه این نامساوی‌ها بدست می‌آوریم

$$\Big(\sum_i y_i\mathbf{a}_i\Big)^t\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^t\mathbf{y}.$$

حال اگر فرض کنیم $\sum_i y_i\mathbf{a}_i = \mathbf{c}$ آنگاه خواهیم داشت $\mathbf{c}^t\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^t\mathbf{y}$. با کنار هم گذاشتن فرضیات بالا می‌توان مسأله دوگان را حدس زد.

$$\begin{aligned} (LD) \qquad \min \quad & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ & \sum_i y_i\mathbf{a}_i = \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

به طور معادل اگر مؤلفه‌های $\mathbf{a}_i$ را با $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ نمایش دهیم، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} (LD) \qquad \min \quad & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ & \sum_i y_ia_{ij} = c_j, \qquad \forall j \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

همان طور که می‌بینیم مسأله دوگان به نحوی تعریف می‌شود که دوگانگی ضعیف بدون هیچ فرض دیگری برقرار شود.

مثال ۶.۱ دوگان مسأله مثال ۳.۱ را می‌توان با استفاده از (۴) و (۱۰) بدست آورد. در اینجا دوگان را به طور مستقیم به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. سه متغیر $y_1, y_2, y_2 \geq 0$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$2y_1 \geq y_1(x_1 + 2x_2) - y_2x_1 - y_3x_2 = x_1(y_1 - y_2) + x_2(2y_1 - y_3).$$

بنابراین اگر قرار دهیم $y_1 - y_2 = 1$ و $2y_1 - y_3 = 1$ آنگاه خواهیم داشت $2y_1 \geq x_1 + x_2$. در نتیجه مسأله دوگان برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & 2y_1 \\ & y_1 - y_2 = 1 \\ & 2y_1 - y_3 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

برای حل این مسأله توجه کنید $y_1 = 1 + y_2 \geq 1$ و در نتیجه $2y_1 \geq 2$. از طرف دیگر برای نقطه شدنی $(y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 1)$ تابع هدف برابر 2 است. توجه کنید که این جواب برابر جواب مسأله اصلی است.

مثال ۷.۱ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

برای محاسبه دوگان این مسأله قرار دهید

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت (۱۳) معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ & A'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

پس دوگان آن برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}'^t\mathbf{y}' \\ & A'^t\mathbf{y}' = \mathbf{c} \\ & \mathbf{y}' \geq 0. \end{aligned}$$

قرار دهید

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\mathbf{b}'^t\mathbf{y}' = \mathbf{b}^t\mathbf{y}$. همچنین توجه کنید که چون $\mathbf{z} \geq 0$، تساوی $A'^t\mathbf{y} = \mathbf{c}$ معادل است با $A^t\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$. پس دوگان برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ A^t\mathbf{y} & \geq \mathbf{c}, \\ \mathbf{y} & \geq 0. \end{aligned}$$

تمرین ۸.۱ دوگان برنامه‌ریزی خطی تمرین ۴.۱ را محاسبه و آن را حل کنید.

۵.۱ دوگانگی قوی

دیدیم که جواب مسأله دوگان (۱۰) یک کران بالا برای جواب مسأله اصلی (۲) است، که به این خاصیت، دوگانگی ضعیف گویند. قضیه دوگانگی قوی بیان می‌کند که تحت شرایطی این دو جواب با هم برابرند. قبل از بیان این قضیه به لم فارکاس[۳۱] می‌پردازیم. از لم فارکاس در اثبات قضیه دوگانگی قوی استفاده خواهیم کرد.

لم ۹.۱ (لم فارکاس) دقیقاً یکی از مسأله‌های زیر شدنی است.

[۳۱] Frakas lemma

(آ) $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$.

(ب) $A^t\mathbf{y} = 0,\ \mathbf{y} \ge 0,\ \mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0$.

اثبات: اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ جواب‌هایی شدنی برای (آ) و (ب) باشند آنگاه داریم

$$0 = \mathbf{y}^t A\mathbf{x} \le \mathbf{y}^t\mathbf{b},$$

که با شرط $\mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0$ در تناقض است. در نتیجه حداکثر یکی از دو مسأله شدنی است. پس کافی است ثابت کنیم حداقل یکی از آنها شدنی است.

فرض کنید (آ) شدنی نباشد، یعنی $\mathbf{x}$ وجود نداشته باشد به طوری که $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$. به طور معادل $\mathbf{z} \ge 0$ وجود ندارد به طوری که $A\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. تعریف کنید

$$\Gamma = \{A\mathbf{x} + \mathbf{z} :\ \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \ge 0\}.$$

Γ یک مخروط محدب و بسته است. از طرف دیگر همان طور که دیدیم شدنی نبودن (آ) معادل است با $\mathbf{b} \notin \Gamma$. بنابراین طبق قضیه هان-باناخ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{y}^t\mathbf{v} \ge 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \Gamma.$$

توجه کنید که با قرار دادن $\mathbf{x} = 0$ بدست می‌آوریم $\{\mathbf{z} : \mathbf{z} \ge 0\} \subseteq \Gamma$. پس $\mathbf{y}^t\mathbf{z} \ge 0$ برای هر $\mathbf{z} \ge 0$. در نتیجه $\mathbf{y} \ge 0$. به همین ترتیب با قرار دادن $\mathbf{z} = 0$ خواهیم داشت $\mathbf{y}^t A\mathbf{x} \ge 0$ برای هر $\mathbf{x}$. در واقع برای هر $\mathbf{x}$ داریم

$$\mathbf{y}^t A\mathbf{x} \ge 0 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{y}^t A(-\mathbf{x}) \ge 0.$$

بنابراین برای هر $\mathbf{x}$ باید داشته باشیم $\mathbf{y}^t A\mathbf{x} = 0$. به طور معادل $\mathbf{y}^t A = 0$.

نتیجه این که با فرض نشدنی بودن (آ)، $\mathbf{y}$-ای پیدا کردیم که در شرطهای (ب) صدق می‌کنند. پس حداقل یکی از (آ) یا (ب) شدنی است. $\square$

تمرین ۱۰.۱ نشان دهید دقیقاً یکی از دو مسأله زیر شدنی است.

(آ) $A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0$.

(ب) $A^t\mathbf{y} \ge 0,\ \mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0$.

حال با استفاده از لم فارکاس می‌توانیم قضیه اساسی برنامه‌ریزی خطی را ثابت کنیم.

قضیه ۱۱.۱ (قضیه اساسی برنامه‌ریزی خطی) هر برنامه‌ریزی خطی یا ناشدنی است، یا بی‌کران است و یا دارای جواب بهینه است.

اثبات: فرم (۲) برای یک برنامه‌ریزی خطی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید (۲) شدنی باشد ولی دارای جواب بهینه نباشد. در این صورت یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید

- وجود دارد دنباله نقاط شدنی $\mathbf{x}_k$ به طوری که $\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k \to \infty$
- وجود دارد دنباله نقاط شدنی $\mathbf{x}_k$ به طوری که $\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k \to d$ که در آن $d \in \mathbb{R}$ و برای هر $\mathbf{x}$ شدنی $\mathbf{c}^t\mathbf{x} < d$.

در حالت اول (۲) بی‌کران است. نشان می‌دهیم حالت دوم اتفاق نمی‌افتد.

فرض کنید $\mathbf{x}_k$ دنباله‌ای از نقاط شدنی باشد که $\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k \to d$. همچنین برای هر $\mathbf{x}$ شدنی داشته باشیم $\mathbf{c}^t\mathbf{x} < d$. قرار دهید

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A \\ -\mathbf{c}^t \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -d \end{bmatrix}.$$

پس $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ و $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{m+1}$. حال توجه کنید که فرض دوم معادل این است که

$$\hat{A}\mathbf{x} \leq \hat{\mathbf{b}},$$

شدنی نیست. در نتیجه با استفاده از لم فارکاس $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{m+1}$ وجود دارد به طوری که

$$\hat{A}^t\hat{\mathbf{y}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{y}} \geq 0, \qquad \hat{\mathbf{b}}^t\hat{\mathbf{y}} < 0.$$

قرار دهید

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ z \end{bmatrix},$$

که در آن $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ و $z \in \mathbb{R}$. در این صورت داریم

$$\mathbf{y}^tA = z\mathbf{c}^t, \qquad \mathbf{y} \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad \mathbf{b}^t\mathbf{y} < dz.$$

حال با توجه با شدنی بودن $\mathbf{x}_k$ داریم

$$z\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k = \mathbf{y}^tA\mathbf{x}_k \leq \mathbf{y}^t\mathbf{b} < dz,$$

که در تناقض است با $\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k \to d$. پس حالت دوم اتفاق نمی‌افتد.

□

حال همه ابزار لازم برای اثبات قضیه دوگانگی قوی را در اختیار داریم.

قضیه ۱۲.۱ (قضیه دوگانگی قوی) (آ) اگر مسأله اصلی بی‌کران باشد آنگاه مسأله دوگان ناشدنی است، و برعکس اگر دوگان بی‌کران باشد آنگاه اصلی ناشدنی است.

(ب) اگر هر دو مسأله اصلی و دوگان شدنی باشند آنگاه دارای جواب بهینه هستند و جواب بهینه آنها با هم برابر است.

(ج) اگر یکی از مسائل اصلی یا دوگان دارای جواب بهینه باشد، آنگاه دیگری نیز دارای جواب بهینه است و این دو با هم برابرند.

اثبات: (آ) طبق دوگانگی ضعیف بی‌کران بودن یکی از مسأله‌ها، ناشدنی بودن دیگری را نتیجه می‌دهد.

(ب) طبق دوگانگی ضعیف کافی است نشان دهیم $\mathbf{x}$ شدنی برای مسأله اصلی، و $\mathbf{y}$ شدنی برای مسأله دوگان وجود دارند به طوری که $\mathbf{c}^t\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^t\mathbf{y}$. به طور معادل باید نشان دهیم $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^t \\ 0 & -A^t \\ 0 & -I \\ -\mathbf{c}^t & \mathbf{b}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ -\mathbf{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

در غیر این صورت با استفاده از لم فارکاس $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0$ و $d \geq 0$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^t & \mathbf{v}^t & \mathbf{w}^t & \mathbf{z}^t & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^t \\ 0 & -A^t \\ 0 & -I \\ -\mathbf{c}^t & \mathbf{b}^t \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{u}^t & \mathbf{v}^t & \mathbf{w}^t & \mathbf{z}^t & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ -\mathbf{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} < 0.$$

به طور معادل داریم

$$A^t\mathbf{u} = d\mathbf{c}, \qquad A(\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \mathbf{z} = d\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}^t\mathbf{u} < \mathbf{c}^t(\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

اگر $d > 0$ آنگاه با قرار دادن $\mathbf{x} = d^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{v})$ و $\mathbf{y} = d^{-1}\mathbf{u}$ نقاطی شدنی برای مسائل اصلی و دوگان بدست می‌آوریم به طوری که $\mathbf{b}^t\mathbf{y} < \mathbf{c}^t\mathbf{x}$، که در تناقض است با دوگانگی ضعیف. بنابراین $d = 0$ و داریم

$$A^t\mathbf{u} = 0, \qquad A(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \leq 0, \qquad \mathbf{b}^t\mathbf{u} < \mathbf{c}^t(\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

حال طبق فرض $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را نقاطی شدنی برای مسائل اصلی و دوگان بگیرید. داریم

$$0 = \mathbf{u}^t A\mathbf{x} \leq \mathbf{u}^t\mathbf{b} < \mathbf{c}^t(\mathbf{w} - \mathbf{v}),$$

و همچنین

$$\mathbf{c}^t(\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{y}^t A(\mathbf{w} - \mathbf{v}) < 0,$$

که تناقض است. پس جواب بهینه دو مسأله وجود دارند و با هم برابرند.

(ج) فرض کنید برای مثال مسأله اصلی دارای جواب بهینه باشد. برای این که ثابت کنیم دوگان دارای جواب بهینه برابر جواب مسأله اصلی است، با استفاده از (ب) کافی است نشان دهیم دوگان شدنی است. پس فرض کنید دوگان شدنی نیست، یعنی

$$A^t\mathbf{y} = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{y} \geq 0,$$

جواب ندارد. در نتیجه با استفاده از لم فارکاس (تمرین ۱۰.۱) وجود دارد $\mathbf{x}_0$ به طوری که

$$A\mathbf{x}_0 \leq 0, \qquad \mathbf{c}^t\mathbf{x}_0 > 0.$$

حال برای هر نقطه شدنی $\mathbf{x}$ برای مسأله اصلی قرار دهید $\mathbf{x}_k = \mathbf{x} + k\mathbf{x}_0$ برای $k \geq 1$. به راحتی قابل بررسی است که $\mathbf{x}_k$ شدنی است و داریم $\mathbf{c}^t\mathbf{x}_k \to \infty$، که تناقض است.

□

قضیه زیر که به آن قضیه کمک مکمل[۳۲] گویند، شرطی لازم و کافی برای بهینه بودن دو نقطه شدنی داده شده از مسأله‌های اصلی و دوگان را بیان می‌کند. اثبات این قضیه با استفاده از دوگانگی قوی ساده است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۱.۱۳ (قضیه کمک مکمل) فرض کنید $\mathbf{x}$ نقطه‌ای شدنی برای (۱) و $\mathbf{y}$ نقطه‌ای شدنی برای (۱۲) باشند. در این صورت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نقاط بهینه هستند اگر و فقط اگر برای هر j که $y_j > 0$، قید j-ام از (۱) برای $\mathbf{x}$ داده شده تساوی باشد.

تمرین ۱.۱۴ برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید. همچنین دوگان آن را بدست آورده و قضیه دوگانگی قوی و کمک مکمل برای آن را تحقیق کنید.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

۲ برنامه‌ریزی خطی در ترکیبیات و علوم کامپیوتر

در این بخش با ارائه مثال‌هایی نشان می‌دهیم که چگونه برنامه‌ریزی خطی در طراحی الگوریتم و حل مسائل ترکیبیات کمک می‌کند.

۱.۲ تطابق بیشینه

یک گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و یال‌های E در نظر بگیرید. یک تطابق[۳۳] در G زیرمجموعه $M \subseteq E$ از یال‌های گراف است به طوری که هر رأس مجاور حداکثر یک یال در M باشد. برای مثال هر تک یال از G یک تطابق است. سؤالی که در اینجا به آن می‌پردازیم پیدا کردن یک تطابق با بیشترین تعداد یال‌های ممکن است. این مسأله را تطابق بیشینه[۳۴] گویند.

هر زیرمجموعه $M \subseteq E$ از یال‌ها را می‌توان با یک بردار $\mathbf{x} \in \{0,1\}^E$ نشان داد به این صورت که

$$x_e = \begin{cases} 1 & e \in M, \\ 0 & e \notin M. \end{cases}$$

با این تناظر M یک تطابق است اگر برای هر رأس $v \in V$ داشته باشیم

$$\sum_{e \sim v} x_e \leq 1,$$

[۳۲] Complementary slackness theorem
[۳۳] Matching
[۳۴] Maximum matching

که در اینجا $e \sim v$ یعنی یال e مجاور رأس v است. بنابراین مسأله محاسبه تطابق بیشینه معادل با حل مسأله بهینه‌سازی زیر است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e\in E} x_e \\ & \sum_{e\sim v} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V, \\ & x_e \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

این مسأله بهینه‌سازی یک برنامه‌ریزی خطی است با یک شرط اضافه که متغیرهای مسأله 0 یا 1 هستند. این مسأله را به طور معادل می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e\in E} x_e \\ & \sum_{e\sim v} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V, \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \qquad \forall e \in E, \\ & x_e \in \mathbb{Z} \qquad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

همان‌طور که می‌بینیم این یک برنامه‌ریزی خطی است با یک شرط اضافه که متغیرها اعدادی صحیح هستند. چنین مسأله‌ای را برنامه‌ریزی خطی صحیح[۳۵] گویند.

برای حل برنامه‌ریزی خطی صحیح الگوریتم بهینه یا کارا[۳۶] وجود ندارد. در واقع همان‌طور که در ادامه خواهیم دید برنامه‌ریزی خطی صحیح یک مسأله NP-سخت است. بنابراین نباید انتظار داشته باشیم که در حالت کلی بتوانیم مسأله‌ای مانند (۱۵) را حل کنیم. برای این کار سعی می‌کنیم یک برنامه‌ریزی خطی صحیح را با یک مسأله بهینه‌سازی دیگر که (به طور کارا) قابل حل باشد جایگزین کنیم به طوری که جواب مسأله دوم تقریبی از جواب مسأله اول باشد.

در مسأله (۱۵) متغیرهای x_e صحیح هستند و همین شرط باعث سخت شدن حل آن می‌شود. برای برطرف کردن این مشکل کافی است این شرط را حذف کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e\in E} x_e \\ & \sum_{e\sim v} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V, \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \qquad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

در این صورت یک مسأله بهینه‌سازی خطی بدست می‌آوریم که به طور کارا قابل حل است. با این وجود جواب این مسأله لزوماً برابر جواب مسأله اصلی نیست. در واقع (۱۶) تخفیف داده شده[۳۷] مسأله (۱۵) است.

برای یک گراف دلخواه جواب (۱۶) بیشتر از جواب (۱۵) است. برای مثال جواب (۱۶) برای گراف مثلث $3/2$ است، ولی جواب (۱۵) برای این گراف برابر است با 1.

[۳۵] Integer linear programming
[۳۶] Efficient
[۳۷] Relaxation

قضیه ۱.۲ برای هر گراف دوبخشی G جواب بهینه (۱۶) و (۱۵) برابرند. در نتیجه مسأله تطابق بیشینه در گراف‌های دوبخشی به طور کارا قابل حل است.

اثبات: تعریف کنید

$$P = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E :\ 0 \le x_e \le 1, \forall e \in E,\ \&\ \sum_{e\sim v} x_e \le 1, \forall v \in V\Big\}.$$

P یک چندبر است و (۱۶) در واقع مسأله بهینه‌سازی $\sum_e x_e$ روی نقاط $\mathbf{x} \in P$ است. می‌دانیم که بیشینه یک تابع خطی روی یک مجموعه محدب روی نقاط رأسی آن اتفاق می‌افتد. بنابراین اگر نشان دهیم همه نقاط رأسی P صحیح هستند (مؤلفه‌های صحیح دارند) اثبات تمام است. توجه کنید که این یک استراتژی کلی است که برای اثبات برابر بودن جواب‌های یک برنامه‌ریزی خطی صحیح و برنامه‌ریزی خطی تخفیف داده شده آن به کار می‌رود.

فرض کنید $\mathbf{x}$ یک رأس P باشد که صحیح نیست. قرار دهید

$$E' = \{e \in E :\ x_e \notin \mathbb{Z}\}.$$

باید نشان دهیم E' تهی است. در غیر این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است.

- E' شامل یک دور $v_1, \dots, v_k$ است.
- E' شامل یک مسیر $v_1, \dots, v_k$ است که قابل گسترش دادن نیست.

در حالت اول با توجه به دوبخشی بودن G طول دور، یعنی k زوج است. برای $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ (که در آن اندیس‌ها به پیمانه k تعریف می‌شوند) قرار دهید

$$x'_{e_i} = x_{e_i} + (-1)^i\epsilon, \qquad\qquad x''_{e_i} = x_{e_i} - (-1)^i\epsilon$$

که در آن $\epsilon = \min\{x_{e_i}, 1 - x_{e_i}\}$. توجه کنید که چون e_i عضو E' است داریم $\epsilon > 0$. با قرار دادن $x'_e = x''_e = x_e$ برای یال‌هایی که در دور نیستند بردارهای $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}''$ را تعریف کنید. به راحتی قابل بررسی است که $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in P$ و همچنین $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$. پس $\mathbf{x}$ نقطه راسی نیست.

برای حالت دوم $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ را می‌توان به طور مشابه تعریف کرد. برای نشان دادن $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in P$ توجه کنید که برای همه یال‌های $e \sim v_1$ یا $e \sim v_k$ داریم $x_e = 0$ مگر این که $e = e_1$ یا $e = e_k$. □

۲.۲ جریان بیشینه-برش کمینه

جریان بیشنه[۳۸] در یک گراف به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار باشد با دو رأس مشخص شده $s, t \in V$ به طوری که s هیچ یال ورودی نداشته باشد، و t هیچ یال خروجی نداشته باشد. رأس s را چشمه و رأس t را چاه می‌نامیم. همچنین فرض کنید که هر یال $e \in E$ دارای یک ظرفیت $c_e \ge 0$ باشد. مسأله جریان بیشینه، مسأله پیدا کردن بیشینه جریانی است که می‌تواند از چشمه به چاه توسط یال‌ها برقرار شود به طوری که مقدار جریانی که از هر یال عبور می‌کند از ظرفیت آن یال بیشتر نشود. به طور دقیق‌تر یک جریان متناظر با $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$ است که $\mathbf{x} \ge 0$، و برای هر رأس $v \ne s, t$ جریان ورودی و خروجی آن با هم برابر باشند، یعنی

$$\sum_{e:e=(u,v)\in E} x_e = \sum_{e:e=(v,u)} x_e \qquad\qquad \forall v \ne s, t.$$

[۳۸] Maximum flow

در این صورت مقدار جریان خارج شده از چشمه برابر با مقدار جریان وارد شده به چاه است:

$$\sum_{e:e=(s,v)} x_e = \sum_{e:e=(v,t)} x_e. \tag{۱۷}$$

هدف یافتن جریان $\mathbf{x}$ است که (۱۷) را بیشینه می‌کند. این مسأله را می‌توان به صورت یک برنامه‌ریزی خطی نوشت.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e:e=(s,v)} x_e & \\
& \sum_{e:e=(u,v)\in E} x_e = \sum_{e:e=(v,u)} x_e & \forall v \neq s,t, \\
& x_e \leq c_e & \forall e, \\
& x_e \geq 0 & \forall e.
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

یک برش[۳۹] در گراف G متناظر با یک تجزیه $V = B \cup (V \setminus B)$ است به طوری که $s \in B$ و $t \notin B$. مقدار متناظر با برش B برابر است با مجموع ظرفیت یال‌های $e = (u,v)$ به طوری که $u \in B$ و $v \notin B$:

$$\sum_{e:e=(u,v)\in B\times(V\setminus B)} x_e.$$

مسأله برش کمینه[۴۰] مسأله محاسبه برشی در G است با کمترین مقدار.

قضیه معروف جریان بیشینه-برش کمینه مربوط بودن دو مسأله فوق را بیان می‌کند. در ادامه اثباتی از این قضیه با استفاده از دوگانگی قوی برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۲ (قضیه جریان بیشینه-برش کمینه) جریان بیشینه در یک گراف برابر برش کمینه در آن است.

اثبات: جریان بیشینه در گراف G توسط برنامه‌ریزی خطی (۱۸) محاسبه می‌شود. در قدم اول دوگان این برنامه‌ریزی خطی را محاسبه می‌کنیم. (۱۸) دارای دو دسته قید است: یک قید برای هر رأس $v \neq s,t$، و یک قید برای هر یال e. بنابراین مسأله دوگان دارای دو دسته متغیر است: متغیر y_v برای هر رأس $v \neq s,t$، و متغیر z_e برای هر یال e. به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که دوگان برابر است با

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_e c_e z_e & \\
& y_v - y_u + z_e \geq 0 & \forall e=(u,v), u\neq s, v\neq t, \\
& y_v + z_e \geq 1 & \forall e=(s,v), v\neq t \\
& -y_v + z_e \geq 0 & \forall e=(v,t), v\neq s, \\
& z_e \geq 1 & e=(s,t), \\
& z_e \geq 0 & \forall e.
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

---
[۳۹] Cut
[۴۰] Minimum cut

توجه کنید که اگر دو متغیر y_s, y_t را با شرط $y_s = 1$ و $y_t = 0$ اضافه کنیم، آنگاه همه قیود به شکل $y_v - y_u + z_e \geq 0$ برای $e = (u, v)$ قابل نوشتن خواهند بود.

هر برش B متناظر با یک جواب شدنی برای (۱۹) است. کافی است قرار دهیم $y_v = 1$ اگر $v \in B$ و $y_v = 0$ اگر $v \notin B$، و همچنین قرار دهیم $z_e = 1$ اگر $e = (u, v) \in B \times (V \setminus B)$، و در غیر این صورت $z_e = 0$. قابل بررسی که $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ تعریف شده یک نقطه شدنی است. همچنین مقدار تابع هدف در این نقطه شدنی برابر با مقدار برش B است. نتیجه این که جواب بهینه (۱۹) کران پایینی برای برش کمینه است.

دیدیم که (۱۹) شدنی است. همچنین توجه کنید که (۱۸) نیز شدنی است (کافی است جریان صفر را در نظر بگیرید). پس طبق قضیه دوگانگی قوی جواب بهینه این دو برنامه‌ریزی خطی برابر است. به علاوه، طبق مشاهده فوق نتیجه می‌گیریم که جریان بیشینه کران پایینی برای برش کمینه است. پس کافی است نشان دهیم برشی وجود دارد که مقدار آن از جواب بهینه (۱۹) و (۱۸) بیشتر نیست. برای این ادعا دو اثبات ارائه می‌دهیم. یک اثبات از قضیه کمک مکمل استفاده می‌کند و اثبات دیگر الگوریتمی است.

اثبات اول: فرض کنید $\mathbf{x}$ و $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ نقاط بهینه‌ای برای (۱۸) و (۱۹) باشند. قرار دهید

$$B = \{s\} \cup \{v : y_v > 0\}.$$

برای هر یال $e = (u, v) \in B \times (V \setminus B)$ داریم

$$z_e \geq y_u - y_v \geq y_u > 0.$$

در نتیجه با استفاده از کمک مکمل باید داشته باشیم $x_e = c_e$. از طرف دیگر برای هر یال $e = (u, v) \in (V \setminus B) \times B$ داریم

$$y_v - y_u + z_e \geq y_v - y_u > 0,$$

که دوباره کمک مکمل نتیجه می‌دهد $x_e = 0$.

حال توجه کنید که مقدر جریان $\mathbf{x}$ برابر است با تفاضل مقدار جریان خارج شده از مجموعه B و مقدار جریان وارد شده به آن. طبق محاسبات بالا این تفاضل چیزی نیست جز مقدار برش B.

اثبات دوم: نشان می‌دهیم برای هر نقطه شدنی $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ برای (۱۹) برشی وجود دارد که مقدار آن کمتر از $\sum_e c_e z_e$ است. فرض کنید که عدد $\alpha \in [0, 1]$ به طور تصادفی و یکنواخت انتخاب کنیم. قرار می‌دهیم

$$B_\alpha = \{s\} \cup \{v : y_v \geq \alpha\}.$$

توجه کنید که $s \in B_\alpha$ و $t \notin B_\alpha$، لذا B_α یک برش است. حال متوسط (امید ریاضی) مقدار برش B_α برابر است با

$$\mathbb{E}[\mathrm{value}(B_\alpha)] = \sum_{e=(u,v)} c_e \Pr[u \in B_\alpha, v \notin B_\alpha].$$

توجه کنید که

$$\Pr[u \in B_\alpha, v \notin B_\alpha] \leq \max\{y_u - y_v, 0\}.$$

از طرف دیگر از آنجا که $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ شدنی است داریم $y_u - y_v \leq z_e$ و $z_e \geq 0$. در نتیجه

$$\mathbb{E}[\mathrm{value}(B_\alpha)] \leq \sum_e c_e z_e.$$

بنابراین برای حداقل یک α مقدار برش B_α از $\sum_e c_e z_e$ بیشتر نیست.

$\square$

برای اثبات قضیه ۱.۲ نشان دادیم که رأس‌های چندبر متناظر با نقاط شدنی برنامه‌ریزی خطی (۱۶) صحیح هستند. اثبات اول قضیه فوق نیز همین ساختار را دارد. زیرا اگر فرض کنیم که ظرفیت یال‌ها صحیح هستند یعنی $c_e \in \mathbb{Z}$، در این صورت طبق قضیه فوق برای نقطه بهینه $\mathbf{x}$ باید داشته باشیم $x_e \in \mathbb{Z}$. در واقع ما این گذاره را برای یال‌های روی برش B نشان دادیم ولی می‌توان نشان داد که این برای هر یال گراف برقرار است. اثبات دوم این قضیه بیشتر جنبه الگوریتمی داشت. در واقع ما با یک جواب از مسأله دوگان شروع و در اصطلاح آن را به یک برش گرد[۴۱] کردیم.

۳.۲ ماتریس‌های تک مدولی

در دو مثال بالا یک مسأله ترکیبیاتی را با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی و بعد از دوگانگی قوی استفاده کردیم. سپس نشان دادیم نقاط بهینه برنامه‌ریزی خطی متناظر صحیح هستند. این استراتژی نسبتاً کلی را می‌توان برای حل مسأله‌های ترکیبیاتی یا الگوریتمی دیگری مانند قضیه دیلورث[۴۲] و قضیه کونیگ[۴۳] نیز بکار برد. قدم نابدیهی در این روش، اثبات صحیح بودن نقاط بهینه برنامه‌ریزی خطی متناظر است.

ماتریس A را کاملاً تک مدولی[۴۴] گویند اگر دترمینان همه زیرماتریس‌های مربعی A یکی از اعداد ± 1 یا 0 باشد. توجه کنید که اگر A کاملاً تک مدولی باشد، A^t نیز کاملاً تک مدولی است. قضیه زیر در اثبات صحیح بودن نقاط بهینه برنامه‌ریزی‌های خطی صحیح به کار می‌آید.

قضیه ۳.۲ (ماتریس‌های کاملاً تک مدولی) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس با درایه‌های ± 1 و 0 باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(آ) A کاملاً تک مدولی است.

(ب) نقاط رأسی مجموعه محدب $\{\mathbf{x} :\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \&\ \mathbf{x} \ge 0\}$ برای هر $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ صحیح هستند.

(ج) نقاط رأسی مجموعه محدب $\{\mathbf{x} :\ \mathbf{a} \le A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \&\ \mathbf{c} \le \mathbf{x} \le \mathbf{d}\}$ برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ و $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ صحیح هستند.

(د) برای هر زیرمجموعه $K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ افراز $K = K_1 \cup K_2$ وجود دارد به طوری که

$$\left| \sum_{i\in K_1} a_{ij} - \sum_{i\in K_2} a_{ij} \right| \le 1, \qquad \forall j.$$

برای مثال در اثبات قضیه ۱.۲ از کاملاً تک مدولی بودن ماتریس وقوع[۴۵] گراف‌های دوبخش استفاده کردیم.

تمرین ۴.۲ نشان دهید ماتریس وقوع یک گراف دوبخشی کاملاً تک مدولی است.

تمرین ۵.۲ نشان دهید ماتریس وقوع یک گراف جهت‌دار کاملاً تک مدولی است.

[۴۱] Round
[۴۲] Dilworth's theorem
[۴۳] König's theorem
[۴۴] Totally unimodular
[۴۵] Incidence matrix

حال می‌توانیم اثباتی از قضیه کونیگ نیز ارائه دهیم.

منظور از پوشش رأسی[۴۶] برای گراف $G=(V,E)$ زیرمجموعه $V'\subseteq V$ است به طوری که هر یال $e\in E$ مجاور حداقل یک رأس از V' باشد. یک پوشش رأسی کمینه یک پوشش رأسی است با کمترین سایز.

قضیه ۶.۲ (قضیه کونیگ) برای هر گراف دوبخشی $G=(V,E)$ سایز تطابق بیشینه برابر است با سایز پوشش رأسی کمینه.

اثبات: با برنامه‌ریزی خطی (۱۶) شروع می‌کنیم. فرض کنید که $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ماتریس وقوع G باشد که در آن $n=|V|$ و $m=|E|$. در این صورت این برنامه‌ریزی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\max\quad & \mathbf{1}_m^t\mathbf{x}\\ & A\mathbf{x}\le\mathbf{1}_n\\ & \mathbf{x}\ge 0,\end{aligned}\tag{۲۰}$$

که در اینجا منظور از $\mathbf{1}_m\in\mathbb{R}^m$ و $\mathbf{1}_n\in\mathbb{R}^n$ بردارهایی هستند که همه مؤلفه‌های آنها برابر 1 است. توجه کنید که قید $x_e\le 1$ در (۱۶) را حذف کرده‌ایم زیرا این شرط از دو قید دیگر بدست می‌آید. طبق قضیه ۱.۲ جواب بهینه این برنامه‌ریزی خطی برابر تطابق بیشینه G است. پس کافی است نشان دهیم این برنامه‌ریزی خطی سایز پوشش رأسی کمینه را نیز مشخص می‌کند.

دوگان (۲۰) برابر است با

$$\begin{aligned}\min\quad & \mathbf{1}_n^t\mathbf{y}\\ & A^t\mathbf{y}\ge\mathbf{1}_m\\ & \mathbf{y}\ge 0.\end{aligned}\tag{۲۱}$$

طبق قضیه دوگانگی قوی جواب بهینه این دو برنامه‌ریزی خطی برابر است. حال توجه کنید که A^t ماتریس وقوع یک گراف دوبخشی است. پس A و در نتیجه A^t کاملاً تک مدولی است. بنابراین نقطه بهینه (۲۱) صحیح هستند. $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ را یک نقطه بهینه بگیرید. به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که برای چنین $\mathbf{y}$ بهینه‌ای باید داشته باشیم $\mathbf{y}\le\mathbf{1}_n$. پس با توجه به صحیح بودن $\mathbf{y}$ داریم $y_v\in\{0,1\}$ برای هر رأس v. قرار دهید

$$V'=\{v:\ y_v=1\}.$$

در این صورت V' یک پوشش رأسی است که سایز آن برابر است با جواب بهینه (۲۱).

□

تمرین ۷.۲ برای هر گراف $G=(V,E)$ تعریف کنید

$$P_G=\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^V:\ \mathbf{x}\ge 0,\ \&\ x_u+x_v\le 1,\forall e=\{u,v\}\in E\big\}.$$

(آ) نشان دهید اگر G دوبخشی باشد آنگاه نقاط رأسی P_G صحیح و متناظر با زیرمجموعه‌های مستقل رأسی گراف هستند.

[۴۶] Vertex cover

(ب) نشان دهید برای گراف دلخواه G نقاط رأسی P_G نیم-صحیح[۴۷] هستند، یعنی مؤلفه‌های آنها عضو $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{m/2 : m \in \mathbb{Z}\}$ است.

راهنمایی: از ایده مشابه اثبات قضیه ۱.۲ استفاده کنید.

مسأله دیگری که با برنامه‌ریزی خطی قابل بیان است و صحیح بودن نقاط رأسی در آن ظاهر می‌شود، مسأله زیردرخت فراگیر کمینه[۴۸] است. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف همبند باشد که هر یال آن یک وزن $c_e > 0$ دارد. هدف پیدا کردن یک زیردرخت فراگیر از G است که مجموع وزن یال‌های آن کمینه باشد.

تمرین ۸.۲ (آ) نشان دهید که مسأله زیر معادل با مسأله زیردرخت فراگیر کمینه است.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_e c_e x_e && \text{(۲۲)}\\
& \sum_e x_e = |V| - 1 \\
& \sum_{e \subseteq S} x_e \leq |S| - 1, \qquad \forall S \subseteq V && \text{(۲۳)}\\
& 0 \leq x_e \leq 1 \\
& x_e \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(ب) با برداشتن شرط صحیح بودن x_e-ها، یک برنامه‌ریزی صحیح بدست می‌آوریم. نشان دهید نقاط رأسی ناحیه شدنی همگی صحیح هستند و نتیجه بگیرید که زیردرخت فراگیر کمینه را می‌توان به صورت کارا محاسبه کرد.

راهنمایی: از ایده مشابه اثبات قضیه ۱.۲ استفاده کنید. برای این کار ابتدا ثابت کنید که اگر به ازای دو زیر مجموعه $S, T \subseteq V$ که $S \cap T \neq \emptyset$ قید (۲۳) تساوی شد، آنگاه این قید برای $S \cap T$ نیز تساوی است.

برای اطلاعات بیشتر در مورد ماتریس‌های کاملاً تک مدولی به [۵] مراجعه کنید.

۴.۲ الگوریتم‌های اولیه-دوگان

از نظریه برنامه‌ریزی خطی می‌توان برای طراحی الگوریتم استفاده کرد. برای مثال در قضیه ۱.۲ دیدیم که حل یک برنامه‌ریزی خطی منجر به حل مسأله تطابق بیشینه در گراف‌های دوبخشی می‌شود. از آنجا که برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به طور کارا حل کرد، الگوریتمی بهینه یا کارا نیز برای تطابق بیشینه بدست می‌آید. در این بخش خواهیم دید که چگونه می‌توان از دوگانگی قوی در طراحی الگوریتم استفاده کرد. ابتدا با یک مثال شروع می‌کنیم.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد که هر رأس آن دارای یک وزن $c_v > 0$ است. هدف پیدا کردن یک پوشش رأسی با کمترین وزن است. همان طور که قبلاً هم دیدیم این مسأله را می‌توان با یک برنامه‌ریزی خطی تقریب زد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_v c_v x_v && \text{(۲۴)}\\
& \sum_{v \sim e} x_v \geq 1, \qquad \forall e \in E \\
& x_v \geq 0, \qquad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

[۴۷] Half-integer
[۴۸] Minimum spanning tree

جواب بهینه این برنامه‌ریزی خطی را ρ بنامید. همچنین وزن پوشش رأسی کمینه را $\tau(G)$ بنامید. در این صورت نقاط شدنی برنامه‌ریزی خطی فوق با فرض اضافه $x_e \in \mathbb{Z}$ معادل پوشش‌های رأسی G هستند. بنابراین داریم $\rho \le \tau(G)$.

دوگان (۲۴) برابر است با

$$\max \quad \sum_{e} y_e \tag{۲۵}$$

$$\sum_{e\sim v} y_e \le c_v, \qquad \forall v\in V \tag{۲۶}$$

$$y_e \ge 0, \qquad \forall e \in E.$$

هر دو برنامه‌ریزی خطی فوق شدنی هستند. پس طبق دوگانگی قوی جواب بهینه (۲۵) نیز ρ است.

فرض کنید $\mathbf{y}^*$ یک نقطه بهینه برای (۲۵) باشد. زیرمجموعه $V' \subseteq V$ را شامل رئوس v بگیرید که برای آنها قید (۲۶) تساوی باشد.

گزاره ۹.۲ (آ) V' یک پوشش رأسی است.

(ب) وزن پوشش رأسی V' حداکثر $2\rho \le 2\tau(G)$ است.

براساس این گزاره یک الگوریتم 2-تقریب[۴۹] برای پوشش رأسی داریم که کارا نیز هست. کافی است نقطه بهینه مسأله دوگان را محاسبه و سپس مجموع V' را تشکیل دهیم.

اثبات: (آ) فرض کنید $\mathbf{x}^*$ یک نقطه بهینه برای (۲۴) باشد. در این صورت به راحتی می‌توان نشان داد که $x_v^* \le 1$. همچنین با توجه به قضیه کمکی مکمل، برای هر $v \notin V'$ داریم $x_v = 0$. همچنین برای هر یال e داریم

$$1 \le \sum_{v\sim e} x_v^* = \sum_{\substack{v\sim e\\ v\notin V'}} x_v^* \le \sum_{\substack{v\sim e\\ v\notin V'}} 1 = \big|\{v\in V' :\ v\sim e\}\big|.$$

پس V' یک پوشش رأسی است.

(ب) وزن پوشش رأسی V' برابر است با

$$\sum_{v\in V'} c_v = \sum_{v\in V'} \left(\sum_{e\sim v} y_e^*\right) = \sum_{e} \sum_{\substack{v\sim e\\ v\in V'}} y_e \le 2\sum_{e} y_e = 2\rho.$$

□

در الگوریتم بالا برای پوشش رأسی ابتدا فرض کردیم که برنامه‌ریزی خطی دوگان را حل می‌کنیم، سپس آن را به پوششی رأسی گرد می‌کنیم. این الگوریتم را می‌توان به الگوریتمی مستقیم (بدون حل کامل مسأله دوگان) تبدیل کرد.

[۴۹] 2-approximation algorithm

الگوریتم اولیه-دوگان برای پوشش رأسی

- **ورودی:** گراف $G = (V, E)$ و وزن‌های $c_v > 0$
- قرار دهید $\mathbf{y} = 0$، $V' = \emptyset$ و $E' = E$.
- تا زمانی که $E' \neq \emptyset$ تکرار کنید:
  * یک زیرمجموعه دلخواه $F \subseteq E'$ انتخاب کنید.
  * y_e را برای همه $e \in F$ (به طور یکنواخت) افزایش دهید تا جایی که یکی از قیدهای دوگان تبدیل به تساوی شود.
  * S را مجموعه همه رئوسی قرار دهید که قید متناظر آنها در دوگان تساوی شده است.
  * همه یال‌های $e \in E'$ که مجاور یکی از رئوس S هستند را از E' حذف کنید.
  * قرار دهید $V' \leftarrow V' \cup S$
- **خروجی:** مجموعه V'

تمرین ۱۰.۲ (آ) نشان دهید V' بدست آمده از الگوریتم فوق یک پوشش رأسی است.

(ب) نشان دهید وزن پوشش رأسی V' حداکثر $2\rho \leq 2\tau(G)$ است.

الگوریتم فوق مثالی از الگوریتم‌های اولیه-دوگان[۵۰] است. این دسته از الگوریتم‌ها با شهودی که از فرمول‌بندی یک برنامه‌ریزی خطی متناظر با مسأله و همچنین دوگان آن بدست می‌آید، طراحی می‌شوند. این دسته از الگوریتم‌ها فرم کلی زیر را دارند.

فرض کنید که بخواهیم یک مسأله کمینه‌سازی را حل کنیم. برای طراحی یک الگوریتم اولیه-دوگان قدم‌های زیر لازم هستند:

۱. با تخفیف دادن مسأله آن را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی بنویسید که جواب آن کران پایینی برای جواب مسأله اصلی باشد.

۲. دوگان برنامه‌ریزی خطی را محاسبه کنید و شهودی از متغیرهای مسأله دوگان بدست بیاورید.

۳. با نقاطی مانند $\mathbf{x} = 0$ و $\mathbf{y} = 0$ که در آن $\mathbf{x}$ برای مسأله اصلی شدنی نیست ولی $\mathbf{y}$ برای دوگان شدنی است شروع کنید.

۴. تا زمانی که به نقطه‌ای شدنی برای مسأله اصلی برسیم تکرار کنید:

- متغیرهای y_j را به نوعی افزایش دهید تا جایی که یکی از قیدهای دوگان تبدیل به تساوی شود.
- تعدادی از متغیرهای مسأله اصلی را انتخاب و آن‌ها را با یک عدد طبیعی جمع کنید.

۵. برای تحلیل الگوریتم از دوگانگی ضعیف، دوگانگی قوی و قضیه کمک مکمل استفاده کنید.

[۵۰] Primal-dual algorithms

توجه کنید که الگوریتم فوق برای پوشش رأسی کمینه نیز همین ساختار را دارد. ما در ابتدا می‌توانیم قرار دهیم $\mathbf{x} = 0$ (متناظر با $V' = \emptyset$). بعد در هر مرحله برای $v \in S$ قرار دهیم $x_v = 1$ (متناظر با $V' \leftarrow V' \cup S$). در این صورت نقطه $\mathbf{x}$ بدست آمده در انتهای الگوریتم شدنی خواهد بود (متناظر با این که V' یک پوشش رأسی است).

برای اطلاعات بیشتر در مورد الگوریتم‌های اولیه-دوگان به فصل چهارم کتاب [۶] و همچنین فصل هفتم کتاب [۷] مراجعه کنید.

تکنیک اولیه-دوگان برای تحلیل الگوریتم‌ها نیز به کار می‌رود. برای مثال مسأله تطابق برخط [۵۱] را در نظر بگیرید. ورودی مسأله یک گراف دوبخشی $G = (V, E)$ با بخش‌های $V = U \cup W$ است. رأس‌های U از بخش اول داده شده‌اند ولی رئوس W و یال‌های متصل به آنها را نمی‌دانیم. در هر قدم زمانی یکی از رئوس $w \in W$ به همراه یال‌های متصل به آن ظاهر می‌شوند. قبل از ظاهر شدن رأس بعدی ما باید تصمیم بگیریم که این رأس را با یکی از رأس‌های U (که تا کنون در تطابق قرار نگرفته) در تطابق قرار دهیم. هدف این است که بیشترین تعداد رئوس W در تطابق قرار گیرند. الگوریتم کارپ-وزیرانی-وزیرانی [۵۲] برای تطابق برخط به صورت زیر است. یک جایگشت تصادفی روی رئوس U در نظر بگیرید. در صورت دیدن رأس $w \in W$، از بین همسایه‌های آن در U که هنوز در تطابق قرار نگرفته‌اند، رأسی که در جایگشت قبل از بقیه قرار گرفته را در تطابق با w قرار دهید. اگر چنین رأسی وجود نداشت w در تطابق قرار نمی‌گیرد. می‌دانیم که متوسط تعداد یال‌های تطابق حاصل از این الگوریتم حداقل $(1 - 1/e)$-برابر سایز تطابق بیشینه G است. اخیراً اثباتی از این گزاره با استفاده از برنامه‌ریزی خطی داده شده است. برای اطلاع از جزئیات این اثبات به [۸] مراجعه کنید.

۳ برنامه‌ریزی نیمه معین

برای تعریف و بررسی خواص برنامه‌ریزی‌های نیمه معین نیاز به تعاریفی از جبر خطی داریم.

مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. مزدوج مختلط $\lambda \in \mathbb{C}$ را با $\bar{\lambda}$ نشان می‌دهیم. لذا طول $\lambda \in \mathbb{C}$ برابر است با $|\lambda| = (\bar{\lambda}\lambda)^{1/2}$. منظور از $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^n$ مزدوج مختط بردار $\mathbf{v}$ است، یعنی برداری که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ هستند. همچنین برای ماتریس X ترانهاده مزدوج [۵۳] آن را با $X^\dagger$ نمایش می‌دهیم، یعنی $X^\dagger = (\bar{X})^t$. در این صورت ضرب داخلی بردارهای مختلط به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i,$$

و داریم $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_i |v_i|^2$. همچنین توجه کنید که $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$.

۱.۳ ماتریس‌های هرمیتی

ماتریس مربعی $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را هرمیتی [۵۴] گوییم هرگاه $X^\dagger = X$. مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی اعدادی حقیقی هستند. برای اثبات این ادعا اگر $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \neq 0$ بردار ویژه X با مقدار ویژه $\lambda \in \mathbb{C}$ باشد داریم $X\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. در نتیجه

$$\bar{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2 = \overline{\lambda\|\mathbf{v}\|^2} = \overline{\langle \mathbf{v}, X\mathbf{v} \rangle} = \langle X\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = (X\mathbf{v})^\dagger \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger X^\dagger \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger X \mathbf{v} = \lambda \|\mathbf{v}\|^2.$$

پس $\lambda = \bar{\lambda}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

[۵۱] Online matching
[۵۲] Karp-Vazirani-Vazirani algorithm
[۵۳] Conjugate transpose
[۵۴] Hermitian

گزاره ۱.۳ هر ماتریس هرمیتی در یک پایه متعامد یکه قطری می‌شود.

اثبات: هر ماتریس حداقل یک بردار ویژه دارد. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}$ یک مقدار ویژه ماتریس هرمیتی $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ با بردار ویژه $\mathbf{v}$ باشد. قرار دهید

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n : \ \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0\}.$$

مشابه استدلال بالا برای حقیقی بودن λ می‌توان نشان داد که زیرفضای W تحت X ناوردا است. حال با توجه به این که $\dim W = n-1$ اثبات با استقرا روی n کامل می‌شود.

□

در حالت خاصی که X حقیقی باشد، هرمیتی بودن X معادل با متقارن بودن آن است، یعنی $X^t = X$. بنابراین مقادیر ویژه یک ماتریس حقیقی متقارن حقیقی هستند. همچنین هر ماتریس حقیقی متقارن در یک پایه متعامد یکه قطری می‌شود. در واقع در این حالت می‌توان پایه‌ای حقیقی پیدا کرد که X را قطری کند. برای این کار کافی است توجه کنیم که اگر $X\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ باشد آنگاه داریم

$$X\bar{\mathbf{v}} = \overline{X\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \lambda\bar{\mathbf{v}}.$$

پس برای هر بردار ویژه $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ بردار $\bar{\mathbf{v}}$ نیز یک بردار ویژه X با همان مقدار ویژه است. حال توجه کنید که فضای تولید شده توسط $\{\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}\}$ برابر فضای تولید شده توسط دو بردار حقیقی $\{\mathbf{v}+\bar{\mathbf{v}}, i(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}})\}$ است. پس به ازای هر بردار ویژه مختلط و مزدوج آن می‌توان دو بردار ویژه حقیقی جایگزین کرد.

گزاره ۲.۳ هر ماتریس هرمیتی $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را می‌توان به صورت

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\dagger,$$

نوشت که در آن $\lambda_i \in \mathbb{R}$ مقادیر ویژه X هستند و $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_1\}$ یک پایه متعامد یکه است. اگر X حقیقی متقارن باشد آنگاه می‌توان فرض کرد که $\mathbf{v}_i$-ها نیز حقیقی هستند و در این صورت $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t$.

اثبات گزاره فوق را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

۲.۳ ماتریس‌های مثبت نیمه معین

اکثر تعاریف و گزاره‌هایی که در این بخش بیان می‌کنیم معادلی برای ماتریس‌های مختلط هرمیتی نیز دارند. با این حال از این جا به بعد فقط ماتریس‌های حقیقی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم همه ماتریس‌ها و بردارها حقیقی هستند مگر این که خلاف آن ذکر شود.

ماتریس متقارن $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را مثبت نیمه معین[۵۵] گوییم هرگاه به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$\langle \mathbf{v}, X\mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^t X\mathbf{v} \geq 0.$$

همچنین X را مثبت معین[۵۶] گوییم هرگاه برای هر $\mathbf{v} \neq 0$ داشته باشیم $\langle \mathbf{v}, X\mathbf{v}\rangle > 0$. مثبت نیمه معین بودن X را با نماد $X \succeq 0$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر X مثبت معین باشد می‌نویسیم $X \succ 0$. با تعمیم این نمادگذاری برای ماتریس‌های متقارن X, Y می‌نویسیم $X \succeq Y$ اگر $X - Y \succeq 0$.

[۵۵]Positive semidefinite
[۵۶]Positive definite

برای مثال ماتریس همانی مثبت معین است. در واقع هر ماتریس قطری با درایه‌های نامنفی مثبت نیمه معین است. همچنین ماتریس

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

مثبت معین است زیرا $\mathbf{v}^t X \mathbf{v} = (v_1 - 2v_2)^2 + v_2^2$.

توجه کنید که عناصر روی قطر یک ماتریس مثبت نیمه معین نامنفی هستند، زیرا $\mathbf{e}_i^t X \mathbf{e}_i$ که در آن $\mathbf{e}_i$ برداری است که مؤلفه i-ام آن 1 و بقیه مؤلفه‌های آن صفر هستند، برابر درایه i-ام روی قطر X است. به طور کلی همه زیرماتریس‌های یک ماتریس مثبت نیمه معین، مثبت نیمه معین هستند.

تمرین ۳.۳ فرض کنید $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مثبت نیمه معین باشد. زیرمجموعه دلخواه $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید X_J نیز مثبت نیمه معین است که در آن منظور از X_J زیرماتریس X متناظر با سطرها و ستون‌های J است.

همچنین مقادیر ویژه یک ماتریس مثبت نیمه معین نامنفی هستند. زیرا اگر $\mathbf{v}$ بردار ویژه X با مقدار ویژه λ باشد داریم $\mathbf{v}^t X \mathbf{v} = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$.

قضیه زیر معیارهایی برای تشخیص مثبت نیمه معین بودن یک ماتریس بیان می‌کند.

گزاره ۴.۳ (آ) X مثبت نیمه معین اگر و فقط اگر متقارن باشد و همه مقادیر ویژه آن نامنفی باشند.

(ب) X مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر ماتریس Q وجود داشته باشد به طوری که $X = Q^t Q$.

(ج) $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مثبت نیمه میعن است اگر و فقط اگر بردارهای $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ وجود داشته باشند به طوری که $x_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$.

(د) X مثبت معین است اگر و فقط اگر مثبت نیمه معین و وارون‌پذیر باشد.

اثبات: (آ) یک طرف گزاره را در بالا نشان دادیم. برعکس فرض کنید که X متقارن و همه مقادیر ویژه آن نامنفی باشند. آنگاه طبق گزاره ۲.۳ ماتریس X را می‌توان به صورت $X = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t$ نوشت که در آن $\lambda_i \geq 0$. حال برای هر $\mathbf{u}$ داریم

$$\mathbf{u}^t X \mathbf{u} = \sum_i \lambda_i (\mathbf{u}^t \mathbf{v})^2 \geq 0.$$

(ب) فرض کنید $X = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}^t \mathbf{v}$ که در آن $\lambda_i \geq 0$. تعریف کنید

$$Q = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i \mathbf{v}_i^t.$$

در این صورت داریم $X = Q^t Q$. برعکس، توجه کنید که $Q^t Q$ متقارن است و داریم

$$\mathbf{u}^t Q^t Q \mathbf{u} = \langle Q\mathbf{u}, Q\mathbf{u} \rangle \geq 0.$$

(ج) با استفاده از قسمت قبل فرض کنید $X = Q^t Q$. بردار $\mathbf{w}_i$ را برابر ستون i-ام Q بگیرید. در این صورت داریم $x_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$. برعکس اگر $x_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$ آنگاه X متقارن است و داریم

$$\mathbf{u}^t X \mathbf{u} = \sum_{i,j} x_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} u_i u_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{w}^* \rangle \geq 0,$$

که در آن $\mathbf{w}^* = \sum_i u_i \mathbf{w}_i$.

(د) طبق تعریف $X \succ 0$ نتیجه می‌دهد $X \succeq 0$. با استفاده از (ب) فرض کنید $X = Q^t Q$. حال توجه کنید که اگر $\mathbf{v}^t X \mathbf{v} = 0$ آنگاه داریم $\mathbf{v}^t Q^t Q \mathbf{v} = \|Q\mathbf{v}\|^2 = 0$. در نتیجه $Q\mathbf{v} = 0$ و $X\mathbf{v} = 0$. پس X وارون‌پذیر نیست.

□

ماتریس X با درایه‌های $x_{ij} = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle$ را ماتریس گرام[۵۷] متناظر با بردارهای $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ گویند. قسمت (ج) گزاره فوق بیان می‌کند که یک ماتریس مثبت نیمه معین است اگر فقط اگر ماتریس گرام باشد.

تمرین ۵.۳ (آ) نشان دهید که اگر $X \succeq 0$ و $\operatorname{tr}(X) = 0$ آنگاه $X = 0$.

(ب) فرض کنید $X, Y \succeq 0$. نشان دهید که اگر $\operatorname{tr}(XY) = 0$ آنگاه $XY = YX = 0$.

راهنمایی: از قسمت (ب) گزاره ۴.۳ و از خاصیت دوری اثر[۵۸] استفاده کنید.

(ج) نشان دهید $X \succeq 0$ اگر و فقط اگر برای هر ماتریس مثبت نیمه معین Y داشته باشیم $\operatorname{tr}(XY) \geq 0$.

(د) نشان دهید $X \succ 0$ اگر و فقط اگر برای هر ماتریس مثبت نیمه معین $Y \neq 0$ داشته باشیم $\operatorname{tr}(XY) > 0$.

تمرین ۶.۳ (آ) نشان دهید اگر $X \succeq Y$ و $Z \succeq 0$ آنگاه داریم $\langle Z, X - Y \rangle \geq 0$ که در آن منظور از $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت است.

(ب) نشان دهید اگر $X \succ Y$ و $0 \neq Z \succeq 0$ آنگاه داریم $\langle Z, X - Y \rangle > 0$.

تمرین ۷.۳ نشان دهید که مجموعه ماتریس‌های مثبت نیمه معین یک مخروط محدب و بسته است.

تمرین ۸.۳ فرض کنید $X \succeq 0$ و $x_{11} = 0$. نشان دهید که همه درایه‌های سطر و ستون اول X صفر هستند.

تمرین ۹.۳ نشان دهید ماتریس قطری بلوکی[۵۹]

$$X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر $A, B \succeq 0$.

تمرین ۱۰.۳ نشان دهید ماتریس متقارن $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر $x_{11}, x_{22} \geq 0$ و $x_{11}x_{22} \geq x_{12}^2$.

تمرین ۱۱.۳ نشان دهید $X = Q^t Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ مثبت معین است اگر و فقط اگر رتبه Q برابر n باشد.

تمرین ۱۲.۳ قرار دهید

$$X = \begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} A & -C \\ -C^t & B \end{bmatrix},$$

که در آن A, B متقارن هستند. نشان دهید $X \succeq 0$ اگر و فقط اگر $Y \succeq 0$.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که دو ماتریس متقارن اگر متشابه باشند، آنگاه یکی از آنها مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر دیگری مثبت نیمه معین باشد.

[۵۷] Gram matrix
[۵۸] Trace
[۵۹] Block diagonal

تمرین ۱۳.۳ فرض کنید

$$X = \begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} \alpha A & C \\ C^t & \alpha^{-1}B \end{bmatrix},$$

که در آن A, B متقارن هستند و $\alpha > 0$. نشان دهید $X \succeq 0$ اگر و فقط اگر $Y \succeq 0$.

تمرین ۱۴.۳ نشان دهید که دترمینان یک ماتریس مثبت نیمه معین، نامنفی است.

۳.۳ ضرب تانسوری

فرض کنید $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ دو بردار دلخواه باشند. ضرب تانسوری[۶۰] این دو بردار، برداری به طول mn است که با نماد $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ نمایش داده می‌شود و مؤلفه‌های آن از ضرب مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یعنی $v_i w_j$ بدست می‌آیند. برای مثال اگر $m = 2$ داریم

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 \\ v_1 w_2 \\ \vdots \\ v_1 w_n \\ v_2 w_1 \\ v_2 w_2 \\ \vdots \\ v_2 w_n \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی برای تشکیل $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ ابتدا مؤلفه‌های به صورت $v_1 w_j$ را می‌نویسیم، سپس مؤلفه‌های به صورت $v_2 w_j$ و الی آخر.

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \mathbf{w} \\ \vdots \\ v_n \mathbf{w} \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که با این تعریف اگرچه مجموعه‌های مؤلفه‌های $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ با مجموعه مؤلفه‌های $\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ برابر است، در حالت کلی این دو بردار با هم برابر نیستند $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \neq \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$.

تمرین ۱۵.۳ نشان دهید که بردارهای $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ وجود ندارند به طوری که

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

تمرین ۱۶.۳ (آ) نشان دهید $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}' = \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} + \mathbf{w}')$.

(ب) نشان دهید $\langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle$.

[۶۰] Tensor product

(ج) نشان دهید اگر $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ یک پایه متعامد یک برای $\mathbb{R}^m$ و $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه

$$\{\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j : 1\le i\le m, 1\le j\le n\},$$

یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^{mn}$ است.

ضرب تانسوری را می‌توان روی ماتریس‌ها نیز تعریف کرد. اگر $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ و $B\in\mathbb{R}^{m'\times n'}$ دو ماتریس دلخواه باشند ضرب تانسوری آنها که با $A\otimes B$ نمایش داده می‌شود یک ماتریس با mm' سطر و nn' ستون است و درایه‌های آن برابرند با $a_{ij}b_{i'j'}$. داریم

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B&\cdots&a_{1n}B\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}B&\cdots&a_{mn}B\end{bmatrix}.$$

تمرین ۱۷.۳ (آ) نشان دهید برای هر عدد حقیقی r داریم $A\otimes(rB)=(rA)\otimes B=r(A\otimes B)$.

(ب) نشان دهید $(A\otimes B)(A'\otimes B')=(AA')\otimes(BB')$.

(ج) نشان دهید $(A\otimes B)^t=A^t\otimes B^t$. نتیجه بگیرید که اگر A و B متقارن باشند، آنگاه $A\otimes B$ نیز متقارن است.

فرض کنید $\mathbf{v}$ بردار ویژه ماتریس A با مقدار ویژه λ، و $\mathbf{w}$ بردار ویژه ماتریس B با مقدار ویژه μ باشند. در این صورت داریم

$$(A\otimes B)(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})=(A\mathbf{v})\otimes(B\mathbf{w})=(\lambda\mathbf{v})\otimes(\mu\mathbf{w})=\lambda\mu(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}).$$

یعنی $\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}$ بردار ویژه $A\otimes B$ است با مقدار ویژه $\lambda\mu$.

فرض کنید که $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ و $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ دو ماتریس مربعی متقارن باشند. در این صورت آنها را می‌توان در پایه‌های متعامد یکه قطری کرد. فرض کنید $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ پایه متعامد یکه‌ای باشد که A را قطری می‌کند و داشته باشیم $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$. همچنین فرض کنید که $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ پایه متعامد یکه‌ای باشد که B را قطری می‌کند و داشته باشیم $B\mathbf{w}_j=\mu_j\mathbf{w}_j$. در این صورت طبق تمرین ۱۶.۳ بردارهای $\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j$ یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^{mn}$ تشکیل می‌دهند و داریم

$$A\otimes B(\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j)=\lambda_i\mu_j\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j.$$

نتیجه این که $\{\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{w}_j : 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ پایه‌ای متعامد یکه است که ماتریس $A\otimes B$ را قطری می‌کند. توجه کنید که با استفاده از تمرین ۱۷.۳ ماتریس $A\otimes B$ متقارن است، پس در یک پایه متعامد یک قطری می‌شود. نکته‌ای که در اینجا به آن رسیدیم این است که پایه متعامد یکه‌ای که $A\otimes B$ را قطری می‌کند از ضرب تانسوری بردارهای پایه‌هایی که هر یک از A و B را قطری می‌کنند بدست می‌آید.

تمرین ۱۸.۳ (آ) نشان دهید که اگر A و B مثبت نیمه معین باشند آنگاه $A\otimes B$ نیز مثبت نیمه معین است.

(ب) نشان دهید اگر $X\succeq Y$ و $Z\succeq 0$ آنگاه $X\otimes Z\succeq Y\otimes Z$.

تمرین ۱۹.۳ نشان دهید اگر $X\succeq\pm Y$ و $X'\succeq\pm Y'$ آنگاه $X\otimes X'\succeq Y\otimes Y'$.

تمرین ۲۰.۳ نشان دهید اگر $X\succeq Y\succeq 0$ و $X'\succeq Y'\succeq 0$ آنگاه $X\otimes X'\succeq Y\otimes Y'$.

۴.۳ تعریف برنامه‌ریزی نیمه معین

برنامه‌ریزی نیمه معین یک مسأله بهینه‌سازی است با تابع هدف و قیدهای خطی روی فضای ماتریس‌های مثبت نیمه معین. یک برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X\rangle \\ & \langle A_i, X\rangle = b_i, \qquad i=1,\dots,m, \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{۲۷}$$

در اینجا $C, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌هایی متقارن هستند و $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{R}$، و ضرب داخلی‌ها، ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت روی فضای ماتریس‌ها است، یعنی $\langle C, X\rangle = \mathrm{tr}(C^tX)$. مانند قبل ماتریس X که در قیدهای این برنامه‌ریزی نیمه معین صدق می‌کند را نقطه‌ای شدنی گوییم. مجموعه نقاط شدنی یک برنامه‌ریزی نیمه معین را ناحیه شدنی نامیم. در صورت ناتهی بودن ناحیه شدنی، برنامه‌ریزی نیمه معین را شدنی و در غیر این صورت آن را ناشدنی گوییم.

مثال ۲۱.۳ فرض کنید $n = m = 2$ و قرار دهید

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

و $b_1 = 2$ و $b_2 = 0$. در این صورت برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۷) معادل خواهد شد با

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{11} + 3x_{22} - 2x_{12} \\ & x_{11} = 2 \\ & x_{11} + x_{22} - 4x_{12} = 0 \\ & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

توجه کنید که (۲۷) فرم کلی یک برنامه‌ریزی نیمه معین است. با جایگزین کردن C با $-C$ مسأله کمینه‌سازی به یک مسأله بیشینه‌سازی تبدیل می‌شود. همچنین برای مثال فرض کنید به جای یک ماتریس متغیر، دو متغیر $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $X' \in \mathbb{R}^{n'\times n'}$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X\rangle + \langle C', X'\rangle \\ & \langle A_i, X\rangle + \langle A'_i, X'\rangle = b_i, \qquad i=1,\dots,m \\ & X, X' \succeq 0. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

برای نوشتن این برنامه‌ریزی نیمه معین به فرم (۲۷) تعریف کنید

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C' \end{bmatrix}, \qquad \hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A'_i \end{bmatrix}.$$

همچنین ماتریس $E_{k\ell}$ را ماتریسی بگیرید که درایه $k\ell$-ام آن برابر 1 و بقیه درایه‌های آن صفر هستند. در این صورت (۲۸) معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle \hat{C}, \hat{X} \rangle \\ & \langle \hat{A}_i, \hat{X} \rangle = b_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ & \langle E_{k\ell} + E_{\ell k}, \hat{X} \rangle = 0 \qquad \forall 1 \le k \le n, \;\; n+1 \le \ell \le n+n' \\ & \hat{X} \succeq 0. \end{aligned} \tag{۲۹}$$

در اینجا شرط سوم ضمانت می‌کند که ماتریس متقارن $\hat{X}$ قطری بلوکی است

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\hat{X} \succeq 0$ معادل است با $X, X' \succeq 0$ (با استفاده از تمرین ۹.۳).

مثال دیگری را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle \\ & \langle A_i, X \rangle \le b_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{۳۰}$$

برای نوشتن این برنامه‌ریزی خطی به فرم (۲۷) توجه کنید که

$$\langle A_i, X \rangle \le b_i \iff \exists y_i \; \langle A_i, X \rangle + y_i = b_i, \;\; y_i \ge 0$$

حال کافی است به جای $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ متغیر ماتریسی $\hat{X} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ را در نظر بگیریم که قطری بلوکی است با یک بلوک $n \times n$ برابر X و m بلوک 1×1 برابر $y_1, \dots, y_m$. برای تضمین این که $\hat{X}$ این فرم قطری بلوکی را دارد باید قیدهایی مانند قبل بر حسب ماتریس‌های $E_{k\ell}$ اضافه کرد. در این صورت داریم

$$\langle A_i, X \rangle + y_i = \langle \hat{A}_i, \hat{X} \rangle,$$

که در آن

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & E_{ii} \end{bmatrix}.$$

با کنار هم گذاشتن اینها (۳۰) به صورت (۲۷) قابل نوشتن است.

در ادامه برنامه‌ریزی‌های نیمه معینی را در نظر خواهیم گرفت که در آنها متغیر ماتریسی X فرم قطری بلوکی خاصی را دارد. مانند مثال‌های فوق چنین محدودیتی را می‌توان با اضافه کردن قیدهایی خطی القا کرد.

توجه کنید که برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت حالت خاصی از برنامه‌ریزی نیمه معین نوشت. کافی است فرض کنیم X یک ماتریس قطری است. در این صورت (۲۷) به یک برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

مثال ۲۲.۳ مسأله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 \\ & \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 & x_2 + 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{۳۱}$$

گرچه این مسأله به فرم (۲۷) نیست، یک مسأله بهینه‌سازی خطی است که ماتریسی پارامتری در آن مثبت نیمه معین است. بنابراین این یک برنامه‌ریزی نیمه معین است. برای نوشتن این مسأله به فرم (۲۷) قرار دهید

$$Z = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 & x_2 + 1 \end{bmatrix}. \tag{۳۲}$$

در این صورت داریم

$$x_1 = z_{12} + z_{22} - 1 = \frac{1}{2}(z_{11} - z_{22} + 1), \qquad x_2 = z_{22} - 1.$$

پس $2x_1 + 5x_2 = 2z_{12} + 7z_{22} - 7$. همچنین هر ماتریس متقارن Z با شرط $z_{12} + z_{22} - 1 = \frac{1}{2}(z_{11} - z_{22} + 1)$ قابل نوشتن به فرم (۳۲) است. در نتیجه (۳۱) معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, Z \rangle - 7 \\ & \langle A, Z \rangle = 3, \\ & Z \succeq 0, \end{aligned} \tag{۳۳}$$

که در آن

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \tag{۳۴}$$

در حالت کلی‌تر مسأله بهینه‌سازی

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i A_i \succeq B, \end{aligned} \tag{۳۵}$$

نیز یک برنامه‌ریزی نیمه معین است و به صورت (۲۷) قابل نوشتن است. برعکس هر برنامه‌ریزی نیمه معین را می‌توان به فرم فوق نوشت.

تمرین ۲۳.۳ برنامه‌ریزی نیمه معین زیر را به فرم (۲۷) بنویسید.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 \\ & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - 1 \\ x_1 - 1 & 3x_2 - x_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

به برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۷) برمی‌گردیم. در اینجا X یک ماتریس مثبت نیمه معین است. در نتیجه X یک ماتریس گرام است (طبق گزاره ۴.۳)، یعنی بردارهای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ وجود دارند به طوری که $x_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$. حال توجه کنید که هم تابع هدف و هم قیدهای (۲۷) محدودیت‌هایی خطی روی درایه‌های X هستند. از آنجا که درایه‌های X همان ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ هستند، این برنامه‌ریزی نیمه معین چیزی نیست جز یک بهینه‌سازی خطی روی ضرب داخلی‌های تعدادی بردار. در واقع یک برنامه‌ریزی نیمه معین یک برنامه‌ریزی خطی روی متغیرهایی است که از ضرب داخلی تعدادی بردار بدست می‌آیند.

تمرین ۲۴.۳ تحقیق کنید که مسأله بهینه‌سازی

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + 7\|\mathbf{w}\|^2 - 7 \\ & \|\mathbf{v}\|^2 + 3 = 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + 3\|\mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

معادل با برنامه‌ریزی نیمه معین مثال ۲۲.۳ است.

تمرین ۲۵.۳ برنامه‌ریزی نیمه معین تمرین ۲۳.۳ را بر حسب ضرب داخلی بردارها بازنویسی کنید.

تمرین ۲۶.۳ فرض کنید C یک ماتریس متقارن باشد. نشان دهید که جواب برنامه‌ریزی نیمه معین زیر برابر کوچک‌ترین مقدار ویژه C است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle \\ & \langle I, X \rangle = \mathrm{tr}(X) = 1, \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که کوچک‌ترین مقدار ویژه C برابر است با کمینه $\mathbf{v}^t C \mathbf{v}$ روی بردارهای $\mathbf{v}$ به طول 1.

تمرین ۲۷.۳ نشان دهید که در برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۷) اگر ماتریس‌های C و A_i همگی قطری بلوکی باشند (با سایز یکسان بلوک‌ها) آنگاه می‌توان فرض کرد که X نیز قطری بلوکی است، یعنی با اضافه کردن این شرط جواب برنامه‌ریزی نیمه معین تغییری نمی‌کند. نتیجه بگیرید که در برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۹) می‌توان شرط سوم را حذف کرد.

مثال ۲۸.۳ برنامه‌ریزی مثبت نیمه معین زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 \\ & \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{۳۶}$$

قید این برنامه‌ریزی خطی معادل است با $x_1, x_2 \geq 0$ و $x_1 x_2 \geq 1$. می‌بینیم که در اینجا کمینه در واقع باید زیرینه[۶۱] باشد که در این صورت جواب این برنامه‌ریزی نیمه معین 0 است.

[۶۱] Infimum

در برنامه‌ریزی‌های خطی دیدیم که یا جواب بی‌کران (مثبت یا منفی بی‌نهایت) است، و یا در نقطه‌ای شدنی قابل حصول است. مثال فوق نشان می‌دهد که برنامه‌ریزی‌های نیمه معین خوش رفتاری برنامه‌ریزی‌های خطی را ندارند. به طور خاص کمینه در (۲۷) ممکن است زیرینه باشد.

در اینجا در مورد چگونگی حل برنامه‌ریزی‌های نیمه معین تنها به این نکته اکتفا می‌کنیم که تحت شرایطی برنامه‌ریزی‌های نیمه معین را می‌توان با روش‌های بیضوی و نقطه داخلی به طور کارا حل کرد. برای جزئیات این الگوریتم‌ها می‌توانید به [۲] و [۵] مراجعه کنید.

۵.۳ دوگان

دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۷) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \preceq C. \end{aligned} \tag{۳۷}$$

توجه کنید که دوگان به فرم (۳۵) و خود یک برنامه‌ریزی نیمه معین است.

دلیل تعریف این دوگان همانند تعریف دوگان برای برنامه‌ریزی‌های خطی، دوگانگی ضعیف است. فرض کنید X یک نقطه شدنی برای مسأله اصلی (مسأله (۲۷)) و $\mathbf{y}$ یک نقطه شدنی برای دوگان باشد. در این صورت داریم

$$\mathbf{b}^t\mathbf{y} = \sum_i b_i y_i = \sum_i y_i \langle A_i, X\rangle \le \langle C, X\rangle,$$

که در نامساوی آخر از مثبت نیمه معین بودن X استفاده کردیم. پس هر نقطه شدنی دوگان، یک کران پایین برای جواب بهینه مسأله اصلی می‌دهد.

مثال ۲۹.۳ می‌خواهیم دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین مثال ۲۲.۳ را محاسبه کنیم. دیدیم که این برنامه‌ریزی نیمه معین را می‌توان به صورت (۳۳) نوشت که در آن C و A توسط (۳۴) داده شده‌اند. در نتیجه دوگان این برنامه‌ریزی نیمه معین برابر است با

$$\begin{aligned} \max \quad & 3y - 7 \\ & yA \preceq C. \end{aligned} \tag{۳۸}$$

قرار دهید $Y = C - yA$، و تعریف کنید

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $\langle A_1, Y\rangle = 2$ و $\langle A_2, Y\rangle = 5$. برعکس، هر ماتریس متقارن Y که به ازای آن داشته باشیم $\langle A_1, Y\rangle = 2$ و $\langle A_2, Y\rangle = 5$ قابل نوشتن به فرم $Y = C - yA$ است. از طرف دیگر داریم $3y - 7 = \langle B, Y\rangle$. بنابراین (۳۸) معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle Y, B\rangle \\ & \langle A_1, Y\rangle = 2 \\ & \langle A_2, Y\rangle = 5 \\ & Y \succeq 0. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

فرم فوق از دوگان را می‌توانستیم به طور مستقیم از روی (۳۱) محاسبه کنیم. قرار دهید

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 & x_2 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید $Y \succeq 0$. در این صورت برای نقطه شدنی (x_1, x_2) برای مسأله اصلی داریم $\hat{X} \geq B$ و در نتیجه

$$\langle B, Y\rangle \leq \langle \hat{X}, Y\rangle = x_1\langle A_1, Y\rangle + x_2\langle A_2, Y\rangle.$$

حال اگر فرض کنیم $\langle A_1, Y\rangle = 2$ و $\langle A_2, Y\rangle = 5$ آنگاه داریم $\langle B, Y\rangle \leq 2x_1 + 5x_2$. با کنار هم گذاشتن اینها (۳۹) بدست می‌آید.

تمرین ۳۰.۳ تحقیق کنید که دوگان (۳۵) برابر است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle B, Y\rangle \\ & \langle A_i, Y\rangle = c_i \qquad \forall i \\ & Y \succeq 0. \end{aligned}$$

تمرین ۳۱.۳ برنامه‌ریزی نیمه معین زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ & \sum_i x_i A_i \succeq B \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

ابتدا این برنامه‌ریزی را به فرم (۳۵) بنویسید و بعد با استفاده از تمرین قبل دوگان آن را محاسبه کنید. تحقیق کنید که دوگان معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle B, Y\rangle \\ & \langle A_i, Y\rangle \leq c_i \qquad \forall i \\ & Y \succeq 0. \end{aligned}$$

تمرین ۳۲.۳ دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین مثال ۲۸.۳ را محاسبه کنید. تحقیق کنید که دوگان فقط یک نقطه شدنی $Y = E_{11}$ دارد.

تمرین ۳۳.۳ نشان دهید که دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین (۲۸) برابر است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\ & \sum_i y_i A_i \preceq C \\ & \sum_j y_j A'_j \preceq C'. \end{aligned}$$

۶.۳ دوگانگی قوی

همان‌طور که در مثال ۲۸.۳ دیدیم، برنامه‌ریزی‌های نیمه معین به خوش‌رفتاری برنامه‌ریزی‌های خطی نیستند. با این حال تحت شرایطی قضیه دوگانگی قوی برای برنامه‌ریزی نیمه معین نیز برقرار است. برای اثبات این قضیه ابتدا با تعمیم لم فارکاس شروع می‌کنیم.

لم ۳۴.۳ (لم فارکاس برای برنامه‌ریزی نیمه معین–همگن) دقیقاً یکی از مسأله‌های زیر شدنی است.

(آ) $\langle A_1, X\rangle = \cdots = \langle A_m, X\rangle = 0$ و $0 \neq X \succeq 0$

(ب) $y_1A_1 + \cdots + y_mA_m \succ 0$

اثبات: فرض کنید X یک نقطه شدنی از (آ) باشد و $\mathbf{y}$ یک نقطه شدنی (ب). داریم

$$0 = \sum_i y_i\langle A_i, X\rangle = \langle \sum_i y_iA_i, X\rangle,$$

که با توجه به $y_1A_1 + \cdots + y_mA_m \succ 0$ و $0 \neq X \succeq 0$ و قسمت (د) تمرین ۵.۳ تناقض است. بنابراین حداکثر یکی از این دو شدنی است. نشان می‌دهیم حداقل یکی شدنی است.

فرض کنید (آ) شدنی نباشد. تعریف کنید

$$\Gamma = \{\big(\langle A_1, X\rangle, \dots, \langle A_m, X\rangle\big) :\ X \succeq 0, \mathrm{tr}(X) = 1\}.$$

شدنی نبودن (آ) معادل است با $0 \notin \Gamma$. از آنجا که Γ محدب و فشرده است، طبق قضیه هان-باناخ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که برای هر $\mathbf{v} \in \Gamma$ داریم $\mathbf{y}^t\mathbf{v} > 0$. یعنی برای هر $X \succeq 0$ که ناصفر باشد داریم

$$0 < \sum_i y_i\langle A_i, X\rangle = \langle \sum_i y_iA_i, X\rangle.$$

در این صورت با توجه به قسمت (د) تمرین ۵.۳ داریم $\sum_i y_iA_i \succ 0$. □

لم زیر تعمیمی از لم فارکاس است.

لم ۳۵.۳ (لم فارکاس برای برنامه ریزی نیمه معین–ناهمگن) دقیقاً یکی از مسأله‌های زیر شدنی است.

(آ) $\langle A_1, X\rangle = \cdots = \langle A_m, X\rangle = 0$ و $\langle C, X\rangle \geq 0$ و $0 \neq X \succeq 0$

(ب) $y_1A_1 + \cdots + y_mA_m \succ C$

تمرین ۳۶.۳ لم فوق را ثابت کنید.

راهنمایی: تعریف کنید

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

و از لم فارکاس همگن استفاده کنید.

قضیه زیر نتیجه‌ای ساده از دوگانگی ضعیف است.

قضیه ۳۷.۳ (آ) اگر مسأله اصلی بی‌کران باشد، دوگان شدنی نیست.

(ب) اگر دوگان بی‌کران باشد، مسأله اصلی شدنی نیست.

(ج) اگر X برای مسأله اصلی و $\mathbf{y}$ برای دوگان شدنی باشند و داشته باشیم $\langle X, C\rangle = \sum_i y_i \langle A_i, X\rangle$ آنگاه X و $\mathbf{y}$ نقاط بهینه مسأله اصلی و دوگان هستند و جواب دو مسأله برابر است.

نقطه شدنی X برای مسأله اصلی را یک نقطه اکیداً شدنی[۶۲] یا نقطه اسلاتر[۶۳] گویند هر گاه $X \succ 0$. گوییم چنین مسأله‌ای اکیداً شدنی است یا دارای شرط اسلاتر[۶۴] است اگر دارای یک نقطه اکیداً شدنی باشد. به طور مشابه نقطه شدنی $\mathbf{y}$ برای دوگان اکیداً شدنی است اگر $C \succ \sum_i y_i A_i$، و اگر چنین $\mathbf{y}$-ای وجود داشت گوییم دوگان اکیداً شدنی است.

مثال ۳۸.۳ برنامه‌ریزی نیمه معین (۳۱) و همچنین برنامه‌ریزی نیمه معین تمرین (۲۳.۳) اکیداً شدنی هستند زیرا $(x_1, x_2) = (1, 1)$ یک نقطه اکیداً شدنی برای هر دو مسأله است. همچنین در تمرین ۳۲.۳ دیدیم که دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین مثال ۲۸.۳ فقط یک نقطه شدنی دارد. این نقطه شدنی یک مقدار ویژه صفر دارد و در نتیجه اکیداً شدنی نیست.

تمرین ۳۹.۳ دیدیم که یک برنامه‌ریزی نیمه معین را می‌توان به عنوان یک برنامه‌ریزی خطی روی متغیرهایی برابر ضرب داخلی تعدادی بردار در نظر گرفت. نشان دهید چنین برنامه‌ریزی نیمه معینی اکیداً شدنی است اگر یک نقطه شدنی وجود داشته باشد که بردارهای متناظر آن مستقل خطی باشند.

حال می‌توانیم به دوگانگی قوی برای برنامه‌ریزی‌های نیمه معین بپردازیم.

قضیه ۴۰.۳ (دوگانگی قوی) فرض کنید مسأله دوگان اکیداً شدنی باشد و بی‌کران نباشد. آنگاه مسأله اصلی جواب بهینه خود را حصول می‌کند (یعنی کمینه زیرینه نیست) و جواب دو مسأله با هم برابر است.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ یک نقطه اکیداً شدنی برای دوگان باشد. پس $\sum_i y_i^* A_i \prec C$، و

$$\langle C, X\rangle > \sum_i y_i^* \langle A_i, X\rangle, \qquad \forall X \neq 0, X \succeq 0. \tag{۴۰}$$

تعریف کنید

$$\alpha^* = \sup\{\mathbf{b}^t \mathbf{y} :\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,\ \sum_i y_i A_i \preceq C\}.$$

توجه کنید که طبق فرض $\alpha^* \in \mathbb{R}$ بی‌نهایت نیست. قرار دهید

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} -A_i & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix}, \qquad\qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & \alpha^* \end{bmatrix}.$$

در این صورت با توجه به تعریف α^* وجود ندارد $\mathbf{y}$ به طور که $\sum_i y_i \hat{A}_i \succ \hat{C}$. پس با استفاده از لم فارکاس وجود دارد $\hat{X} \neq 0$ به طوری که $\hat{X} \succeq 0$، $\langle \hat{C}, \hat{X}\rangle \geq 0$ و $\langle \hat{A}_i, \hat{X}\rangle = 0$ برای $1 \leq i \leq m$. فرض کنید

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & * \\ * & r \end{bmatrix}.$$

---
[۶۲] Strictly feasible
[۶۳] Slater point
[۶۴] Slater's condition

در این صورت $X \succeq 0$ و $r \geq 0$ و حداقل یکی از آنها ناصفر است، و داریم

$$\langle C, X\rangle \leq r\alpha^*, \qquad \langle A_i, X\rangle = rb_i.$$

فرض کنید $r = 0$. در این صورت X ناصفر است و داریم $\langle A_i, X\rangle = 0$ و $\langle C, X\rangle \leq 0$ که با (۴۰) در تناقض است. پس فرض می‌کنیم $r > 0$. قرار دهید $X^* = \frac{1}{r}X$. در این صورت X^* یک نقطه شدنی برای مسأله اصلی است و داریم $\langle C, X^*\rangle \leq \alpha^*$. اثبات با توجه به دوگانگی ضعیف تمام است. $\square$

قضیه فوق نتیجه‌های مهم زیر را دارد.

قضیه ۴۱.۳ (آ) فرض کنید مسأله اصلی شدنی و دوگان اکیداً شدنی باشند. آنگاه جواب بهینه مسأله اصلی قابل حصول است و جواب بهینه دو برنامه‌ریزی نیمه معین برابر است.

(ب) فرض کنید هر دو مسأله اکیداً شدنی باشند. آنگاه جواب بهینه آنها قابل حصول و با هم برابر است.

قضیه زیر نتیجه‌ای ساده از دوگانگی ضعیف است.

قضیه ۴۲.۳ (قضیه کمکی مکمل) فرض کنید X یک نقطه شدنی مسأله اصلی و $\mathbf{y}$ یک نقطه شدنی دوگان باشد. در این صورت $X, \mathbf{y}$ نقاط بهینه هستند و جواب دو مسأله برابر است اگر و فقط اگر $X(C - \sum_i y_i A_i) = 0$.

مثال ۴۳.۳ برنامه‌ریزی نیمه معین زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{33} \\ & x_{22} = 0 \\ & x_{12} + x_{21} + x_{33} = 1 \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

این برنامه‌ریزی نیمه معین را می‌توان به صورت کمینه $\langle E_{33}, X\rangle$ در نظر گرفت که در آن X مثبت نیمه معین است و $\langle E_{22}, X\rangle = 0$ و $\langle E_{12} + E_{21} + E_{33}, X\rangle = 1$. با توجه به شرط $x_{22} = 0$ داریم $x_{12} = x_{21} = 0$. پس طبق شرط دوم $x_{33} = 1$. از طرف دیگر برنامه‌ریزی نیمه معین فوق شدنی است. پس جواب بهینه آن برابر 1 است. حال به عنوان تمرین بررسی کنید که دوگان این برنامه‌ریزی نیمه معین برابر است با

$$\begin{aligned} \max \quad & y_2 \\ & \begin{bmatrix} 0 & -y_2 & 0 \\ -y_2 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - y_2 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

مثبت نیمه معین بودن ماتریس 3×3 فوق نتیجه می‌دهد که $y_2 = 0$. همچنین $(y_1, y_2) = (0, 0)$ یک نقطه شدنی دوگان است. پس جواب بهینه دوگان برابر 0 و مخالف جواب مسأله اصلی است. همان طور که می‌بینیم هیچ یک از مسأله‌های اصلی و دوگان اکیداً شدنی نیستند. به همین دلیل دوگانگی قوی برقرار نیست.

تمرین ۴۴.۳ تحقیق کنید که دوگان برنامه‌ریزی نیمه معین تمرین ۲۶.۳ برابر است با

$$\begin{aligned} \max \quad & y \\ & yI \preceq C, \end{aligned}$$

و از دوگانگی قوی نتیجه بگیرید که کوچک‌ترین مقدار ویژه C بزرگ‌ترین y-ای است که $yI \preceq C$.

۴ برنامه‌ریزی نیمه معین در ترکیبیات و علوم کامپیوتر

در این بخش با ذکر چند مثال کاربردهایی از برنامه‌ریزی نیمه معین در ترکیبیات و علوم کامپیوتر را بیان می‌کنیم.

۱.۴ الگوریتم گومنز-ویلیامسون برای برش بیشینه

گراف $G=(V,E)$ در نظر بگیرید با وزن $w_e \geq 0$ برای هر یال $e \in E$. همان طور که قبلاً دیدیم یک برش در این گراف یک زیرمجموعه سره $\emptyset \subset B \subset V$ است، که رئوس گراف را به دو بخش $V = V_1 \cup V_2$ افراز می‌کند که در آن $V_1 = B$ و $V_2 = U \setminus B$. یال‌های متناظر این برش، یال‌هایی هستند که یک سر آنها در V_1 است و سر دیگر در V_2. همچنین وزن هر برش برابر مجموع وزن همه یال‌های برش است. در مسأله برش بیشینه[۶۵] هدف یافتن برشی با بیشترین وزن است.

می‌دانیم که محاسبه دقیق برش بیشینه NP-سخت است. با این حال می‌توانیم امیدوار باشیم که بتوانیم به طور کارا تقریبی از برش بیشینه را محاسبه کنیم.

فرض کنید که هر رأس G را به طور تصادفی و مستقل از رئوس دیگر درون V_1 یا V_2 قرار دهیم. در نتیجه هر یال با احتمال $1/2$ یک یال برشی خواهد بود و در نتیجه (با استفاده از خطی بودن امید ریاضی) متوسط وزن برش بدست آمده برابر $1/2$ مجموع وزن همه یال‌هاست. بنابراین با این الگوریتم تصادفی می‌توان برشی را محاسبه کرد که وزن آن حداقل به اندازه نصف وزن برش بیشینه باشد.

تمرین ۱.۴ نشان دهید که الگوریتم غیراحتمالاتی زیر نیز یک 2-تقریب از برش بیشینه را می‌دهد. ترتیبی دلخواه $v_1, \ldots, v_n$ روی رئوس گراف در نظر بگیرید. در مرحله k-ام، رأس v_k را در بخش V_1 یا V_2 قرار دهید بسته به این که مجموع وزن یال‌های بین v_k و $V_1 \cap \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ بیشتر است یا مجموع وزن یال‌های بین v_k و $V_2 \cap \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$.

پس یک الگوریتم 2-تقریب کارا برای برش بیشینه داریم. سؤال این است که آیا می‌توانیم الگوریتم‌های تقریبی بهتری برای این مسأله بیابیم؟ برنامه‌ریزی خطی یکی از روش‌هایی بود که سعی می‌شد با استفاده از آن الگوریتم‌های بهتری برای برش بیشینه بدست آورد. بردار $\mathbf{x} \in \{0,1\}^E$ را به این صورت تعریف کنید که اگر $e \in E$ یک یال برشی بود (به ازای یک برش $V = V_1 \cup V_2$) آنگاه $x_e = 1$ و در غیر این صورت $x_e = 0$. در این صورت برای هر سه یال e, f, g که تشکیل یک مثلث می‌دهند، حداکثر دو تای آنها یال برشی است. پس باید داشته باشیم $x_e + x_f + x_g \leq 2$. از طرف دیگر اگر مثلاً e یال برشی بود، آنگاه حداقل یکی از f, g نیز یال برشی است. پس باید داشته باشیم $x_e \leq x_f + x_g$. بنابراین برنامه‌ریزی خطی زیر تخفیف داده شده مسأله برش بیشینه است.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\
& x_e + x_f + x_g \leq 2, && \text{برای هر مثلث } efg \\
& x_e \leq x_f + x_g, && \text{برای هر مثلث } efg \\
& 0 \leq x_e \leq 1, && \forall e \in E.
\end{aligned}$$

حال سؤال این است که آیا با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فوق می‌توان الگوریتم تقریبی بهتری برای برش بیشینه بدست آورد؟ جواب این سؤال خیر است زیرا گراف‌هایی وجود دارد که جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی فوق برای آنها تقریباً دو برابر برش بیشینه است. نتیجه این که این برنامه‌ریزی خطی جواب خوبی برای برش بهینه ارائه نمی‌دهد. در واقع حتی با اضافه کردن قیدهای مشابهی برای همه دورهای به طول فرد نیز نمی‌توان جواب خوبی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی بدست آورد.

[۶۵] MAXCUT

برای بدست آوردن تقریبی از برش بیشینه با استفاده از برنامه‌ریزی خطی، متغیرهای x_e را به ازای یال‌های گراف در نظر گرفتیم که مقدار آنها به نوعی مشخص کننده یال‌های یک برش بودند. با این حال یک برش در واقع بر حسب زیرمجموعه‌ای از رئوس تعریف می‌شود. پس شاید طبیعی‌تر این باشد که یک برنامه‌ریزی صحیح برای مسأله برش بیشینه بدست بیاوریم که متغیرهای آن با رئوس گراف اندیس‌گذاری شده‌اند.

فرض کنید $V = \{1, \dots, n\}$ و به ازای برش $V = V_1 \cup V_2$ قرار دهید $u_i = 1$ اگر رأس i عضو V_1 باشد و $u_i = -1$ در غیر این صورت. حال یال $e = \{i, j\}$ یک یال برشی است اگر $u_i u_j = -1$. پس مسأله برش بیشینه معادل بهینه‌سازی زیر است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e=\{i,j\}\in E} \frac{1}{2} w_e (1 - u_i u_j) \\ & u_i \in \{\pm 1\} \qquad \forall i \in V. \end{aligned} \tag{۴۱}$$

این یک برنامه‌ریزی صحیح است ولی خطی نیست. تابع هدف یک تابع درجه دو بر حسب u_i-ها است. به طور کلی به نظر می‌رسد که نمی‌توان مسأله برش بیشینه را بر حسب متغیرهای $u_1, \dots, u_n$ به صورت یک برنامه‌ریزی خطی صحیح نوشت، و شاید دلیل این که برنامه‌ریزی خطی در حل مسأله برش بیشینه کمکی نمی‌کند همین باشد.

عدد حقیقی u_i را می‌توان به عنوان برداری از سایز یک (برداری در $\mathbb{R}^1$) در نظر گرفت. در این صورت $u_i u_j$ برابر است با ضرب داخلی دو بردار u_i و u_j. همچنین قید $u_i \in \{\pm 1\}$ در (۴۱) معادل است با $u_i^2 = 1$. پس آن را هم می‌توان بر حسب ضرب داخلی نوشت. حال اگر شرط این که سایز بردارها یک است را برداریم به یک برنامه‌ریزی نیمه معین می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e=\{i,j\}\in E} \frac{1}{2} w_e (1 - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle) \\ & \|\mathbf{u}_i\|^2 = 1 \qquad \forall i \in V. \end{aligned} \tag{۴۲}$$

اگر $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را ماتریسی بگیریم که درایه ij-ام آن برابر $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$ باشد آنگاه به طور معادل این برنامه‌ریزی نیمه معین را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \langle W, J - X \rangle \\ & \langle E_{ii}, X \rangle = 1 \qquad \forall i \in V, \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{۴۳}$$

در اینجا $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی است که درایه ij آن که $e = \{i, j\}$ یک یال است برابر $w_{ij} = w_e$ است و اگر $\{i, j\}$ یال نباشد $w_{ij} = 0$. همچنین $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس است که همه درایه‌های آن یک هستند.

تمرین ۲.۴ نشان دهید که مسأله بهینه‌سازی (۴۳) با شرط اضافه $\mathrm{rank} X = 1$ معادل (۴۱) و در نتیجه معادل مسأله برش بیشینه است.

فرض کنید $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ بردارهای بهینه‌ای برای (۴۲) باشند. سؤال این است که چگونه از این بردارها برای بدست آوردن یک برش (با وزن زیاد) استفاده کنیم، یعنی این که چگونه جواب (۴۲) را به جوابی برای مسأله برش بیشینه گرد کنیم.

ایده گومنز و ویلیامسون [۹، ۱۰] استفاده از روش ابرصفحه تصادفی[۶۶] است. فرض کنید $\mathbf{r}$ یک بردار تصادفی باشد. قرار می‌دهیم

$$V_1 = V_1(\mathbf{r}) = \{i : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle \geq 0\}, \qquad V_2 = V_2(\mathbf{r}) = \{i : \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle < 0\}.$$

در این صورت یال $e = \{i, j\}$ یک یال برشی است اگر $\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle) \neq \mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{r}\rangle)$ که در آن $\mathrm{sign}(\cdot)$ تابع علامت است:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

وزن برش بیشینه گراف را با $\psi(G)$ و وزن برش $V = V_1(\mathbf{r}) \cup V_2(\mathbf{r})$ را با $\phi(\mathbf{r})$ نمایش دهید. در این صورت امید ریاضی $\phi(\mathbf{r})$ برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(\mathbf{r})] &= \sum_{e=\{i,j\}\in E} w_e \Pr[\text{یک یال برشی باشد } e] \\ &= \sum_{e=\{i,j\}\in E} w_e \Pr[\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle) \neq \mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{r}\rangle)] \end{aligned}$$

تمرین ۳.۴ (آ) نشان دهید $\Pr[\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle) \neq \mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{r}\rangle)] = \frac{1}{\pi}\arccos(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle)$

راهنمایی: کافی است محاسبه را برای حالتی که سایز بردارها دو است انجام دهیم.

(ب) برای $-1 \leq c \leq 1$ نشان دهید

$$\frac{1}{\pi}\arccos(c) \geq \frac{\rho}{2}(1-c), \qquad 1 - \frac{1}{\pi}\arccos(c) \geq \frac{\rho}{2}(1-c),$$

که در آن $\rho = 0.87856$.

راهنمایی: بسط تیلور تابع $\arccos(\cdot)$ را در نظر بگیرید.

با استفاده از تمرین فوق ادامه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(\mathbf{r})] &= \sum_{e=\{i,j\}\in E} w_e \Pr[\mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}\rangle) \neq \mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{r}\rangle)] \\ &= \sum_{e=\{i,j\}\in E} \frac{1}{\pi} w_e \arccos(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle) \\ &\geq \rho \sum_{e=\{i,j\}\in E} \frac{1}{2} w_e (1 - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle) \\ &\geq \rho\psi(G), \end{aligned}$$

که در نامساوی آخر از این که (۴۲) تخفیف داده شده مسأله برش بیشینه است استفاده کردیم. نتیجه این که الگوریتم گومنز-ویلیامسون برشی را محاسبه می‌کند که متوسط وزن آن حداقل به اندازه ρ برابر متوسط وزن برش بیشینه است. کافی است با استفاده از الگوریتم‌های کارایی که برای حل برنامه‌ریزی‌های نیمه معین وجود دارند (۴۲) حل و سپس با انتخاب یک بردار تصادفی $\mathbf{r}$ برش $V = V_1(\mathbf{r}) \cup V_2(\mathbf{r})$ را بدست بیاوریم.

[۶۶] Random hyperplane

۲.۴ 2-صدق‌پذیری بیشینه

مسأله 2-صدق‌پذیری بیشینه[۶۷] به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ متغیرهایی بولی باشند. نقیض آنها را با $x_{n+1} = \bar{x}_1, \dots, x_{2n} = \bar{x_n}$ نمایش می‌دهیم. برای تعدادی از جفت‌های $1 \leq i, j \leq 2n$ بندهایی[۶۸] به فرم $x_i \vee x_j$ داریم. مجموعه این جفت‌ها را با E نمایش می‌دهیم. با هر انتخاب $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ تعدادی از این بندها درست و تعدادی نادرست می‌شوند. سؤال این است که حداکثر چه تعدادی از این بندها می‌توانند درست شوند در صورتی که $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ انتخاب شوند. توجه کنید که مسأله تصمیم‌گیری این که آیا همه بندهای هم‌زمان می‌توانند درست شوند یا خیر، به مسأله 2-صدق پذیری[۶۹] معروف است، و در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. با این حال الگوریتم کارایی برای 2-صدق‌پذیری بیشینه نمی‌دانیم. در ادامه توضیح می‌دهیم که چگونه با استفاده از ایده گومنز-ویلیامسون می‌توان الگوریتمی تقریبی برای این مسأله بدست آورد.

توجه کنید که $x_{n+i} = \bar{x}_i$ معادل است با $x_i + x_{n+i} = 1$. همچنین داریم (اندیس‌ها به پیمانه $2n$ هستند)

$$x_i \vee x_j = \overline{\bar{x}_i \wedge \bar{x}_j} = \overline{x_{n+i} \wedge x_{n+j}} = 1 - x_{n+i}x_{n+j}.$$

در نتیجه مسأله 2-صدق پذیری بیشینه معادل است با بهینه‌سازی زیر.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\{i,j\} \in E} 1 - x_{n+i}x_{n+j} \\ & x_i + x_{n+i} = 1, \qquad \forall i, \\ & x_i \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{۴۴}$$

مسأله بهینه‌سازی فوق را می‌توان بر حسب متغیرهای ± 1 نوشت. کافی است قرار دهیم $u_i = (-1)^{x_i + 1}$. به دلیلی که در ادامه مشخص خواهد شد فرض کنید همچنین قرار دهیم $u_0 = 1$. در این صورت $x_i = \frac{1}{2}(1 + u_0 u_i)$ و $u_{n+i} = -u_i$. حال مسأله بهینه‌سازی فوق را می‌توان برحسب متغیرهای $\{+1, -1\}$ $u_0, u_1, \dots, u_n \in$ نوشت. هر یک از جملات $x_{n+i}x_{n+j}$ بسته به این که $n+i$ و $n+j$ بیشتر از n باشند یا خیر را می‌توان به صورت مجموعی از $u_\ell u_k$-ها نوشت. برای مثال داریم

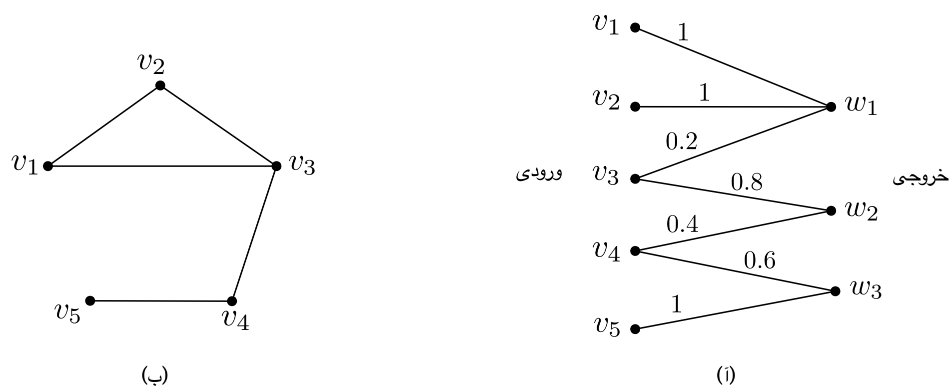
$$\begin{aligned} 1 - x_1 x_{n+2} &= 1 - \frac{1}{4}(1 + u_0 u_1)(1 - u_0 u_2) = 1 - \frac{1}{4}(1 + u_0 u_1 - u_0 u_2 - u_1 u_2) \\ &= \frac{1}{4}\big[(1 - u_0 u_1) + (1 + u_0 u_2) + (1 + u_1 u_2)\big]. \end{aligned}$$

نتیجه این که مجموعه‌های E^+ و E^- از جفت‌های $\{i, j\}$ و همچنین وزن‌های $w_{ij} \geq 0$ وجود دارند به طوری که (۴۴) معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\{i,j\} \in E^+} w_{ij}(1 + u_i u_j) + \sum_{\{i,j\} \in E^-} w_{ij}(1 - u_i u_j) \\ & u_i \in \{\pm 1\}, \qquad \forall i. \end{aligned} \tag{۴۵}$$

توجه کنید که در بالا فرض کرده بودیم $u_0 = 1$. با این حال اگر $(u_0, \dots, u_n)$ یک نقطه شدنی در مسأله بهینه‌سازی فوق باشد، $(-u_0, \dots, -u_n)$ نیز شدنی است با همان مقدار تابع هدف. پس شرط $u_0 = 1$ اضافی است.

[۶۷] MAX 2SAT
[۶۸] Clause
[۶۹] 2SAT



شکل ۲: یک کانال و گراف متناظر آن

تمرین ۴.۴ نشان دهید یک الگوریتم ρ-تقریب کارا برای مسأله 2-صدق‌پذیری بیشینه وجود دارد که در آن $\rho = 0.87856$.

راهنمایی: ابتدا برنامه‌ریزی نیمه معین تخفیف داده شده متناظر با (۴۵) را بنویسید، یعنی بجای اعداد u_i بردارهای به طول یک $\mathbf{u}_i$ و بجای u_iu_j ضرب داخلی $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle$ را قرار دهید. سپس برای گرد کردن جواب بهینه آن از روش گومنز–ویلیامسون استفاده کنید، و برای تحلیل مقدار متوسط جواب بدست آمده از تمرین ۳.۴ استفاده کنید.

برای مسأله 2-صدق‌پذیری بیشینه الگوریتم تقریبی بهتری نیز وجود دارد. این الگوریتم با استفاده از برنامه‌ریزی نیمه معین طراحی شده است و دو فرق با الگوریتم فوق دارد. فرق اول این که برای $u_i \in \{\pm 1\}$ داریم $1 \pm u_0u_i \geq 0$. در نتیجه برای هر i, j داریم

$$u_0u_i + u_0u_j + u_iu_j \geq -1,$$
$$-u_0u_i - u_0u_j + u_iu_j \geq -1,$$
$$-u_0u_i + u_0u_j - u_iu_j \geq -1,$$
$$u_0u_i - u_0u_j - u_iu_j \geq -1.$$

بنابراین می‌توانیم این نامساوی‌ها را در برنامه‌ریزی نیمه معین تخفیف داده شده (۴۵) اضافه کنیم. فرق دوم استفاده از روش دیگری برای گرد کردن یک نقطه شدنی برنامه‌ریزی نیمه معین است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این الگوریتم به [۱۱] مراجعه کنید.

۳.۴ ظرفیت شانون گراف‌ها

یک کانال برای انتقال اطلاعات دارای یک مجموعه ورودی V و یک مجموعه خروجی W است و با توزیع‌های احتمال شرطی $p(w|v)$ مشخص می‌شود، به این معنی که اگر ورودی کانال $v \in V$ باشد آنگاه خروجی کانال با احتمال $p(w|v)$ برابر $w \in W$ است. چنین کانالی را می‌توان با یک گراف دوبخشی روی رئوس $V \cup W$ نمایش داد با یک یال بین v و w اگر $p(w|v)$ ناصفر باشد. در شکل ۲ یک کانال با مجموعه ورودی $V = \{v_1, \ldots, v_5\}$ و مجموعه خروجی $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ نمایش داده شده است. در این کانال اگر برای مثال ورودی v_1 باشد، آنگاه خروجی حتماً w_1 است، و اگر ورودی v_3 باشد خروجی با احتمال 0.2 برابر w_1 و با احتمال 0.8 برابر w_2 خواهد بود.

برای انتقال اطلاعات با استفاده از این کانال فرستنده، پیام خود را در ورودی کانال کدگذاری[۷۰] می‌کند و سپس کد متناظر با آن پیام را بر روی کانال می‌فرستد. سپس گیرنده خروجی کانال را دریافت و آن را کدگشایی[۷۱] می‌کند. برای مثال فرض کنید که فرستنده بخواهد یکی از سه پیام m_1, m_2, m_3 را انتقال دهد، و پیام m_1 را در ورودی v_1، پیام m_2 را در ورودی v_3 و پیام m_3 را در ورودی v_5 کد کند. حال اگر گیرنده خروجی w_2 را دریافت کند، مطمئن خواهد بود که پیام فرستنده m_2 است زیرا از بین v_1, v_3, v_5 این تنها v_3 است که خروجی w_2 برای آن امکان‌پذیر است. به همین ترتیب اگر خروجی کانال w_3 باشد، آنگاه پیام m_3 است. ولی اگر گیرنده w_1 را در خروجی ببیند مطمئن نخواهد بود که پیام فرستنده m_1 است یا m_2، یعنی در این حالت در کدگشایی احتمال خطا وجود دارد.

در حالت کلی‌تر فرستنده می‌تواند از کدهای به طول بیشتر از یک استفاده کند. فرض کنید فرستنده بخواهد یکی از پیام‌های $m_1, \ldots, m_k$ را انتقال دهد. برای این کار می‌تواند از کلمه-کدهای[۷۲] به طول n استفاده کند، به این صورت که به ازای هر پیام m_i یک دنباله $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in}) \in V^n$ مشخص کند. حال با n بار استفاده از کانال می‌تواند کلمه-کد $\mathbf{v}_i$ را انتقال دهد، به این صورت که در استفاده اول ورودی کانال را برابر v_{i1}، و در استفاده دوم ورودی را برابر v_{i2} قرار می‌دهد و الی آخر. به ازای هر بار استفاده از کانال، گیرنده یک خروجی، و روی هم یک عضو W^n را دریافت می‌کند. سپس (مانند مثال بالا) با استفاده از ساختار کلمه-کدها سعی می‌کند پیام فرستنده را حدس بزند. اگر گیرنده بتواند پیام را بدون خطا حدس بزند به کد $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ یک کد بدون خطا[۷۳] گویند. همچنین نرخ[۷۴] این کد برابر $k^{1/n}$ خواهد بود، به این معنی که به طور متوسط با هر بار استفاده از کانال می‌توان $k^{1/n}$ پیام انتقال داد.[۷۵] در صورتی که برای k, n داده شده k کلمه-کد $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ به طول n وجود داشته باشند به طوری که بدون احتمال خطا قابل کدگشایی باشند آنگاه $k^{1/n}$ را یک نرخ قابل حصول[۷۶] بدون خطا گویند. سوپریمم همه نرخ‌های قابل حصول بدون خطای یک کانال را ظرفیت[۷۷] آن کانال گویند.

$$\Theta = \sup\{k^{1/n} : \text{ یک کد بدون خطا به طول } n \text{ با } k \text{ کلمه-کد وجود دارد }\}.$$

اجازه دهید مثال کانال همانی را بررسی کنیم. در کانال همانی مجموعه ورودی و خروجی یکسان است $V = W$، و اگر ورودی کانال $v \in V$ باشد آنگاه خروجی نیز حتماً v است. بنابراین اگر همه کلمه کدهای ممکن به طول n را در نظر بگیریم (یعنی همه اعضای V^n) آنگاه این کلمه-کدها بدون احتمال خطا قابل کدگشایی هستند (اگر خروجی $\mathbf{v} \in V^n$ باشد ورودی نیز حتماً $\mathbf{v}$ است). تعداد کلمه-کدهای این کد برابر است با $k = |V|^n$ و نرخ متناظر با آن $k^{1/n} = |V|$ است. بنابراین ظرفیت بدون خطای کانال همانی برابر $|V|$ است.

فرض کنید که بخواهیم یک کد بدون خطا به طول $n = 1$ طراحی کنیم. در مثال شکل ۲ دیدیم که کد با کلمه-کدهای $\{v_1, v_3, v_5\}$ یک کد بدون خطا نیست، زیرا $p(w_1|v_1)$ و $p(w_1|v_3)$ هر دو ناصفر هستند، پس اگر خروجی کانال w_1 باشد نمی‌توانیم ورودی را بدون خطا از بین کلمه-کدهای $\{v_1, v_3, v_5\}$ حدس بزنیم. در اصطلاح v_1, v_3 قابل اشتباه[۷۸] هستند پس هر دو هم‌زمان نمی‌توانند در یک کد بدون خطا حضور داشته باشند.

با توجه به مشاهده فوق می‌توانیم گراف اشتباهات[۷۹] متناظر با یک کانال را تعریف می‌کنیم. گراف اشتباهات یک گراف

---

[۷۰] Encoding

[۷۱] Decoding

[۷۲] Codewords

[۷۳] Zero error code

[۷۴] Rate

[۷۵] در نظریه اطلاعات به لگاریتم $k^{1/n}$ نرخ کد می‌گویند که صحیح‌تر است. در ترکیبیات برای راحتی از لگاریتم صرف نظر می‌شود. در واقع $k^{1/n}$ تعداد پیام‌های قابل انتقال است و $\log_2(k)/n$ تعداد بیت‌های قابل انتقال.

[۷۶] Achievable rate

[۷۷] Capacity

[۷۸] Confusable

[۷۹] Confusability graph

با مجموعه رئوس V (مجموعه ورودی کانال) است و در آن $v \sim v'$ مجاورند اگر قابل اشتباه باشند، یعنی وجود داشته باشد $w \in W$ به طوری که $p(w|v)$ و $p(w|v')$ هر دو ناصفر باشند. گراف اشتباهات کانال شکل ۲ (آ) در شکل ۲ (ب) نمایش داده شده است. همان طور که می‌بینیم رئوس v_1, v_3 در این گراف مجاورند. همچنین توجه کنید که گراف اشتباهات کانال همانی، گراف تهی (بدون یال) است.

در حالت کلی یک کد بدون خطا به طول $n = 1$ یک زیرمجموعه $C \subseteq V$ است که دارای هیچ دو کلمه-کد قابل اشتباهی نیست. به زبان گراف‌ها $C \subseteq V$ یک کد بدون خطاست اگر و فقط اگر C یک مجموعه مستقل[80] رأسی باشد. عدد استقلال[81] یک گراف برابر سایز بزرگترین مجموعه مستقل رأسی آن است و با α نمایش داده می‌شود. نتیجه این که سایز بزرگترین کد بدون خطای به طول $n = 1$ یک کانال برابر است با عدد استقلال گراف متناظر با آن کانال.

همین استدلال را می‌توان برای کدهای به طول بیشتر نیز تکرار کرد. یک کد به طول n یک زیرمجموعه $C \subseteq V^n$ است و بدون خطاست اگر و فقط اگر وجود نداشته باشد کلمه-کدهای $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ و $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ در C که قابل اشتباه باشند. در اینجا قابل اشتباه نبودن $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ یعنی این که وجود نداشته باشد $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ به طوری که برای هر ℓ داشته باشیم $p(w_\ell|v_\ell), p(w_\ell|v'_\ell) \neq 0$.

برای فهمیدن ساختار کدهای به طول بیشتر از یک می‌توان از ضرب قوی گراف‌ها[82] استفاده کرد. برای دو گراف $G = (V, E)$ و $H = (W, F)$ ضرب قوی آنها که با $G \boxtimes H$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $V \times W$ و یال‌های $(v, w) \sim (v', w')$ بین دو رأس متفاوت (v, w) و (v', w') اگر v, v' برابر یا در G مجاور باشند و همچنین w, w' برابر یا در H مجاور باشند.

$$(v, w) \sim (v', w) \quad \Leftrightarrow \quad (v \neq v' \vee w \neq w') \wedge (v = v' \vee v \sim v') \wedge (w = w' \vee w \sim w').$$

برای مثال ضرب قوی گراف G در گرافی بدون یال برابر اجتماع تعدادی کپی از G است. همچنین ضرب قوی دو گراف کامل، گرافی کامل است. برای راحتی ضرب قوی یک گراف در خودش را با $G \boxtimes G = G^{\boxtimes 2}$ و n بار ضرب گراف در خودش را با $G^{\boxtimes n}$ نمایش می‌دهیم.

تمرین ۵.۴ فرض کنید A_G ماتریس مجاورت گراف G باشد. نشان دهید $A_{G \boxtimes H} = A_G \otimes A_H + I \otimes A_H + A_G \otimes I$.

فرض کنید G گراف اشتباهات کانال مورد مطالعه باشد. در این صورت $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ و $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ به عنوان دو کلمه-کد به طول n قابل اشتباه هستند اگر $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ به عنوان رئوس $G^{\boxtimes n}$ مجاور باشند. نتیجه این که سایز بزرگترین کد بدون خطای به طول n برابر است با $\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)$، یعنی عدد استقلال گراف $G^{\boxtimes n}$. همچنین ظرفیت بدون خطای کانال برابر است با

$$\Theta(G) = \sup_n \alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)^{1/n} = \sup_n \alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)^{1/n}. \qquad (۴۶)$$

عبارت فوق را ظرفیت شانون[83] گراف G گویند.

[80] Independent set
[81] Independence number
[82] Strong product of graphs
[83] Shannon capacity

۴.۴ محاسبه ظرفیت شانون

همان‌طور که دیدیم برای محاسبه ظرفیت بدون خطای یک کانال فقط صفر و یا ناصفر بودن احتمالات $p(w|v)$ مهم است. به همین دلیل گراف اشتباهات متناظر با کانال را تعریف کردیم. دیدیم که ظرفیت بدون خطای یک کانال را می‌توان بر حسب عدد استقلال توان‌های گراف اشتباهات (با ضرب قوی) نوشت. لذا از این جا به بعد کانال مورد مطالعه را فراموش کرده و فقط گراف اشتباهات $G=(V,E)$ متناظر با آن را در نظر می‌گیریم.

توجه کنید که $\alpha(G\boxtimes G')\geq\alpha(G)\cdot\alpha(G')$ زیرا اگر $U\subset V$ و $U'\subseteq V'$ مستقل رأسی باشند آنگاه $U\times U'\subseteq V\times V'$ یک زیرمجموعه مستقل رأسی در $G\boxtimes G'$ است. بنابراین $\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)\geq\alpha(G)^n$ و $\Theta(G)\geq\alpha(G)$.
با استفاده از این خاصیت (و لم فکت[۸۴]) همچنین می‌توان نشان داد که

$$\Theta(G)=\lim_{n\to\infty}\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)^{1/n}. \tag{۴۷}$$

محاسبه ظرفیت شانون در حالت کلی مسأله بسیار سختی است. همان طور که می‌دانیم محاسبه عدد استقلال گراف‌ها NP-تمام است. ولی محاسبه ظرفیت شانون از این هم سخت‌تر است زیرا باید عدد استقلال $G^{\boxtimes n}$ را برای هر n محاسبه و سپس حد (۴۷) را حساب کنیم.

شانون ظرفیت بعضی از گراف‌ها را در مقاله اصلی خود [۱۲] در مورد کدگذاری بدون خطا بدست آورد. برای مثال با استفاده از ایده شانون استدلال می‌کنیم که ظرفیت شانون گراف شکل ۲ (ب) برابر 2 است. توجه کنید که $Q_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ و $Q_2=\{v_4,v_5\}$ دو خوشه[۸۵] از گراف G هستند که رئوس گراف را افراز می‌کنند. بنابراین عدد استقلال گراف حداکثر 2 است زیرا یک مجموعه مستقل رأسی دارای حداکثر یک عضو از هر خوشه است. از طرف دیگر $\{v_1,v_5\}$ یک مجموعه مستقل رأسی است پس $\alpha(G)=2$. همین استدلال را می‌توان برای توان‌های $G^{\boxtimes n}$ گراف نیز تکرار کرد. نکته اول این که $Q_{\ell_1}\times\cdots Q_{\ell_n}$ برای هر $\ell_1,\dots,\ell_n\in\{1,2\}$ یک خوشه در $G^{\boxtimes n}$ است، و نکته دوم این که این 2^n خوشه رئوس گراف را افراز می‌کنند، پس $\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)\leq 2^n$. از طرف دیگر $\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)\geq\alpha(G)^n$. نتیجه این که $\alpha\big(G^{\boxtimes n}\big)=2^n$ و $\Theta(G)=2$.

در حالت کلی اگر بتوان رئوس گراف G را به $\alpha(G)$ خوشه افراز کرد آنگاه $\Theta(G)=\alpha(G)$. با این ایده می‌توان ظرفیت گراف‌های چهار رأسی را حساب کرد.

تمرین ۶.۴ نشان دهید $\alpha\big(C_5^{\boxtimes 2}\big)=5$ که در آن C_5 دور به طول پنج است. نتیجه بگیرید $\Theta(C_5)\geq\sqrt{5}>2=\alpha(C_5)$.

همان طور که در تمرین بالا می‌بینیم ظرفیت گراف C_5 برابر $\alpha(C_5)$ نیست. در واقع C_5 کوچکترین گرافی بود که شانون نتوانست ظرفیت آن را محاسبه کند. مسأله محاسبه ظرفیت گراف C_5 سال‌ها باز بود تا این که لواز [۱۳] با استفاده از برنامه‌ریزی نیمه معین آن را محاسبه کرد. قبل از پرداختن به کار لواز اجازه دهید ایده شانون در استفاده از برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه ظرفیت گراف‌ها را توضیح دهیم.

گراف $G=(V,W)$ روی مجموعه رئوس $V=\{1,\dots,m\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $U\subseteq V$ یک مجموعه مستقل رأسی در G باشد. در این صورت برای هر خوشه $Q\subseteq V$ داریم $|Q\cap U|\leq 1$. اگر $\mathbf{x}\in\{0,1\}^V$ را بردار مشخصه U قرار دهیم، یعنی $x_i=1$ اگر و فقط اگر $i\in U$ آنگاه به طور معادل داریم

$$\sum_{i\in Q}x_i\leq 1,\qquad \text{برای هر خوشه } Q\ .$$

[۸۴] Fekete's lemma
[۸۵] Clique

برعکس برای $\mathbf{x} \in \{0,1\}^V$ داده شده نامساوی‌های فوق برقرار باشند آنگاه $U = \{i : x_i = 1\}$ یک مجموعه مستقل رأسی است. بنابراین مسأله عدد استقلال را می‌توان به صورت یک برنامه‌ریزی خطی صحیح بازنویسی کرد و سپس برنامه‌ریزی خطی تخفیف داده شده آن را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ & \sum_{i \in Q} x_i \le 1, && Q \in \mathcal{Q}_{\max} \\ & 0 \le x_i \le 1, && \forall i \in V. \end{aligned} \tag{۴۸}$$

در اینجا منظور از $\mathcal{Q}_{\max} = \mathcal{Q}_{\max}(G)$ مجموعه همه خوشه‌های ماکسیمال G است (Q یک خوشه ماکسیمال است اگر به طور سره زیرمجموعه هیچ خوشه دیگری نباشد). توجه کنید که اگر قید اول برای خوشه‌های ماکسیمال برقرار باشد، برای همه خوشه‌ها برقرار است ولی ما برای راحتی فقط خوشه‌های ماکسیمال را درنظر می‌گیریم. جواب بهینه این برنامه‌ریزی خطی را با $\alpha^*(G)$ نمایش می‌دهند و به آن عدد دسته‌بندی رأسی کسری[۸۶] می‌گویند.

تمرین ۷.۴ با استفاده از دوگانگی قوی نشان دهید که $\alpha^*(G)$ برابر است با جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی زیر.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{\max}} y_Q \\ & \sum_{Q \ni i} y_Q \ge 1, && \forall i \in V \\ & y_Q \ge 0, && \forall Q \in \mathcal{Q}_{\max}. \end{aligned} \tag{۴۹}$$

از آنجا که (۴۸) تخفیف داده شده عدد استقلال است داریم $\alpha(G) \le \alpha^*(G)$. حال سؤال این است که آیا $\alpha^*(G)$ کران بالایی برای $\Theta(G)$ نیز هست یا خیر؟

فرض کنید Q یک خوشه گراف G و Q' یک خوشه گراف G' باشد. آنگاه $Q \times Q'$ یک خوشه $G \boxtimes G'$ است. برعکس، به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که هر خوشه $G \boxtimes G'$ زیرمجموعه یک خوشه به فرم $Q \times Q'$ است.

تمرین ۸.۴ ثابت کنید $\mathcal{Q}_{\max}(G \boxtimes G') = \mathcal{Q}_{\max}(G) \times \mathcal{Q}_{\max}(G')$.

فرض کنید $\mathbf{x}$ یک نقطه بهینه (۴۸) باشد به طوری که $\sum_i x_i = \alpha^*(G)$. همچنین فرض کنید $\mathbf{x}'$ یک نقطه بهینه (۴۸) برای گراف G' باشد به طوری که $\sum_j x'_j = \alpha^*(G')$. قرار دهید $\mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}'$. با استفاده از تمرین فوق $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{V \times V'}$ یک نقطه شدنی برای برنامه‌ریزی خطی (۴۸) برای $G \boxtimes G'$ است، زیرا برای $Q \in \mathcal{Q}_{\max}(G)$ و $Q' \in \mathcal{Q}_{\max}(G')$ داریم

$$\sum_{(i,j) \in Q \times Q'} z_{ij} = \sum_{(i,j) \in Q \times Q'} x_i x'_j = \left(\sum_{i \in Q} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in Q'} x'_j \right) \le 1.$$

به همین ترتیب مقدار تابع هدف برای نقطه شدنی $\mathbf{z}$ برابر است با $\alpha^*(G)\alpha^*(G')$. از آنجا که (۴۸) یک مسأله بیشینه‌سازی است نتیجه می‌گیریم $\alpha^*(G \boxtimes G') \ge \alpha^*(G)\alpha^*(G')$.

---
[۸۶] Fractional vertex packing

همین ایده را می‌توان روی مسأله دوگان یعنی (۴۹) پیاده کرد. فرض کنید $\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}'$ دو نقطه بهینه (۴۹) برای گراف‌های G و G' باشند. دوباره با استفاده از تمرین ۸.۴ می‌توان نشان داد که $\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}'$ یک نقطه شدنی (۴۹) برای گراف $G\boxtimes G'$ است. همچنین تابع هدف به ازای $\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}'$ برابر است با $\alpha^*(G)\alpha^*(G')$. حال چون (۴۹) یک مسأله کمینه‌سازی است نتیجه می‌گیریم $\alpha^*(G\boxtimes G')\leq\alpha^*(G)\alpha^*(G')$. با کنار هم گذاشتن دو نتیجه فوق داریم

$$\alpha^*(G\boxtimes G')=\alpha^*(G)\alpha^*(G'). \tag{۵۰}$$

حال به مسأله محاسبه ظرفیت شانون برمی‌گردیم. دیدیم که α^* کران بالایی برای عدد استقلال، و همچنین ضربی است. در نتیجه برای هر n داریم

$$\alpha(G^{\boxtimes n})\leq\alpha^*(G^{\boxtimes n})=\alpha^*(G)^n.$$

با استفاده از این نامساوی در تعریف ظرفیت شانون بدست می‌آوریم

$$\Theta(G)\leq\alpha^*(G).$$

تمرین ۹.۴ تحقیق کنید که $\alpha^*(C_5)=5/2$ و نتیجه بگیرید $\Theta(C_5)\leq 5/2$.

دیدیم که چگونه برنامه‌ریزی خطی در بدست آوردن کران بالایی برای ظرفیت شانون مورد استفاده قرار گرفت. نوشتن یک مسأله ترکیبیاتی برحسب یک برنامه‌ریزی خطی صحیح و سپس تخفیف دادن آن به یک برنامه‌ریزی خطی ایده‌ای بود که برای مسأله‌های دیگری نیز مورد استفاده قرار گرفت. ایده جدیدی که در اینجا بکار بردیم، اثبات ضربی بودن کران بالای تخفیف داده شده بود، یعنی (۵۰). برای اثبات این تساوی هم از دوگانگی قوی برنامه‌ریزی خطی استفاده کردیم. با توجه به این که (۴۸) یک مسأله بیشینه‌سازی بود ثابت کردیم $\alpha^*(G\boxtimes G')\geq\alpha^*(G)\alpha^*(G')$. بعد با استفاده از این که (۴۹) یک مسأله کمینه‌سازی بود جهت عکس نامساوی را ثابت کردیم. این ایده برای اثبات قضیه‌های ضرب مستقیم[۸۷] بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه مثال‌های دیگری از این تکنیک را خواهیم دید.

۵.۴ عدد لواز برای گراف‌ها

می‌خواهیم یک برنامه‌ریزی نیمه معین بدست بیاوریم که تخفیف داده شده عدد استقلال باشد. فرض کنید $U\subseteq V$ یک مجموعه مستقل رأسی باشد. تعریف کنید $x_i=1$ اگر $i\in U$، و $x_i=0$ اگر $i\notin U$. در این صورت داریم

$$x_ix_j=0,\qquad \forall i\sim j, \tag{۵۱}$$

و همچنین

$$|U|=\sum_i x_i. \tag{۵۲}$$

شرط (۵۱) بر حسب حاصل‌ضرب اعداد $x_1,\dots,x_m$ است. پس همان‌طور که قبلاً دیدیم با تخفیف دادن x_i-ها از اعداد حقیقی به بردارها می‌توان آن را بر حسب ضرب داخلی بردارها نوشت. ولی (۵۲) بر حسب x_i-ها خطی است و نمی‌توان به طور مستقیم آن را برحسب ضرب داخلی نوشت. با این حال کافی است توجه کنیم که

$$\sum_{i,j}x_ix_j=\left(\sum_i x_i\right)^2=|U|^2.$$

[۸۷] Direct product theorems

حال‌اگر قرار دهیم $x'_i = x_i/|U|^{1/2}$ آنگاه داریم

$$\sum_i x'_i x'_i = 1, \qquad \sum_{i,j} x'_i x'_j = |U|.$$

با کنار هم گذاشتن ایده‌های فوق به برنامه‌ریزی نیمه معین زیر به عنوان تخفیفی از عدد استقلال می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,j} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ & \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 \qquad \forall i \sim j \\ & \sum_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1. \end{aligned} \tag{۵۳}$$

جواب بهینه برنامه‌ریزی نیمه معین فوق را با $\vartheta(G)$ نمایش می‌دهند و به آن عدد لواز می‌گویند. با توجه به توضیحات فوق داریم $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$.

تمرین ۱۰.۴ نشان دهید (۵۳) معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle J, Z \rangle \\ & \langle E_{ij}, Z \rangle = 0, \qquad \forall i \sim j, \\ & \langle I, Z \rangle = \mathrm{tr}(Z) = 1, \\ & Z \succeq 0, \end{aligned} \tag{۵۴}$$

که در آن J ماتریسی است که همه درایه‌های آن 1 هستند، I ماتریس همانی است و E_{ij} ماتریسی است که تنها درایه ناصفر آن ij و برابر 1 است.

به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که دوگان (۵۳) و در واقع دوگان (۵۴) برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & \sum_{i,j: i \sim j} r_{ij} E_{ij} + tI \succeq J. \end{aligned} \tag{۵۵}$$

برنامه‌ریزی نیمه معین فوق را به صورت دیگری نیز می‌توان نوشت. تعریف کنید

$$Y = \sum_{i,j: i \sim j} r_{ij} E_{ij} + tI - J.$$

در این صورت داریم $y_{ii} = t - 1$ و برای هر i, j که $i \nsim j$ داریم $y_{ij} = -1$. بنابراین (۵۵) معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & \langle E_{ij}, Y \rangle = -1, \qquad \forall i \nsim j \\ & \langle E_{ii}, Y \rangle = t - 1, \qquad \forall i, \\ & Y \succeq 0. \end{aligned} \tag{۵۶}$$

به راحتی قابل بررسی است که (۵۴) و (۵۶) شرایط قضیه دوگانگی قوی را دارا می‌باشند و در نتیجه جواب بهینه (۵۶) نیز $\vartheta(G)$ است.

قضیه ۱۱.۴ برای هر گراف G داریم $\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\bar{G})$ که در آن $\bar{G}$ متمم گراف G است و $\chi(\bar{G})$ عدد رنگی آن.

اثبات: نامساوی $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$ را که قبلاً ثابت کردیم. برای نامساوی دوم یک رنگ آمیزی $\bar{G}$ با k رنگ را در نظر بگیرید. درایه‌های ماتریس Y را به صورت زیر تعریف کنید. قرار دهید $y_{ij} = -1$ اگر رنگ رئوس i, j متفاوت باشند و در غیر این صورت $y_{ij} = k - 1$. همچنین قرار دهید $t = k$. در این صورت اگر نشان دهیم $Y \succeq 0$ آنگاه نتیجه می‌شود که $\vartheta(G) \leq k$. مثبت نیمه معین بودن Y از تمرین زیر نتیجه می‌شود.

□

تمرین ۱۲.۴ (آ) نشان دهید رتبه J برابر یک است و تنها مقدار ویژه ناصفر J برابر است با $\mathrm{tr}(J)$. نتیجه بگیرید $J \succeq 0$.

(ب) فرض کنید W یک ماتریس قطری بلوکی باشد به طوری که همه درایه‌های بلوک‌ها هم برابر و نامنفی هستند. نشان دهید تعداد مقادیر ویژه ناصفر W برابر تعداد بلوک‌های ناصفر است و $W \succeq 0$.

(ج) نشان دهید ماتریس W قسمت قبل با J جابجا می‌شود، و مقادیر ویژه $W - J$ را محاسبه کنید. نتیجه بگیرید که ماتریس Y تعریف شده در اثبات قضیه ۱۱.۴ مثبت نیمه معین است.

به مسأله محاسبه ظرفیت شانون گراف‌ها برگردیم. مانند محاسباتی که برای $\alpha^*(G)$ انجام دادیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\vartheta(G)$ نیز ضربی است.

قضیه ۱۳.۴ برای هر دو گراف G, G' داریم $\vartheta(G \boxtimes G') = \vartheta(G)\vartheta(G')$.

اثبات: فرض کنید Z یک نقطه بهینه (۵۴) برای G و Z' یک نقطه بهینه آن برای G' باشند. در این صورت $Z \otimes Z'$ یک نقطه شدنی (۵۴) برای $G \boxtimes G$ است با مقدار تابع هدف $\vartheta(G)\vartheta(G')$. بنابراین $\vartheta(G \boxtimes G') \geq \vartheta(G)\vartheta(G')$.
برای اثبات جهت دیگر نامساوی از دوگان استفاده می‌کنیم. اگر (Y, t) یک نقطه بهینه (۵۶) برای G و (Y', t) یک نقطه بهینه آن برای G' باشند، آنگاه (W, tt') که در آن $W = Y \otimes Y' + J \otimes Y' + Y \otimes J$ یک نقطه شدنی (۵۶) برای $G \boxtimes G'$ است با مقدار تابع هدف $tt' = \vartheta(G)\vartheta(G')$. پس داریم $\vartheta(G \boxtimes G') \leq \vartheta(G)\vartheta(G')$.

□

تمرین ۱۴.۴ تعریف کنید $\bar{\vartheta}(G) = \vartheta(\bar{G})$ که در آن $\bar{G}$ متمم گراف G است. ثابت کنید $\bar{\vartheta}(G \boxtimes G') = \bar{\vartheta}(G)\bar{\vartheta}(G')$.

با استفاده از قضیه ۱۳.۴ داریم

$$\alpha(G^{\boxtimes n}) \leq \vartheta(G^{\boxtimes n}) = \vartheta(G)^n.$$

در نتیجه

$$\Theta(G) \leq \vartheta(G).$$

توجه کنید که $\vartheta(G)$ جواب یک برنامه‌ریزی نیمه معین است، و به طور کارا قابل محاسبه است. بنابراین به طور بهینه می‌توان کران بالایی برای ظرفیت گراف‌ها بدست آورد. این کران بالا توسط لواز [۱۳] در سال ۱۹۷۹ بدست آمد. لواز با استفاده از کران فوق ظرفیت C_5 را حساب کرد.

نتیجه ۱۵.۴ $\Theta(C_5)=\sqrt{5}$.

اثبات: در تمرین ۶.۴ دیدیم که $\Theta(C_5)\geq\sqrt{5}$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\vartheta(C_5)=\sqrt{5}$. برای محاسبه $\vartheta(C_5)$ از دوگان استفاده می‌کنیم. فرض کنید (Y,t) یک نقطه شدنی (۵۶) باشد. فرض کنید P ماتریس جایگشت $i\mapsto i+1 \pmod 5$ باشد. در این صورت (PYP^t,t) نیز یک نقطه شدنی است با همان مقدار تابع هدف (یعنی t). نکته در این است که برنامه‌ریزی نیمه معین (۵۶) بر حسب گراف C_5 تعریف شده است. حال از آنجا که این گراف دارای تقارن P است، اگر ماتریس Y را تحت این تقارن جایگشت دهیم، باز هم نقطه‌ای شدنی بدست می‌آوریم. به همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که (Y',t) که در آن

$$Y'=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}P^kY(P^t)^k,$$

نیز یک نقطه شدنی است با همان مقدار تابع هدف. حال توجه کنید که Y' تحت P ناورداست، یعنی $PY'P^t=Y'$. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که ماتریس بهینه نیز تحت P ناورداست.

بنابراین فرض می‌کنیم که (Y,t) یک نقطه بهینه (۵۶) باشد به طوری که $PYP^t=P$. هر ماتریس Y که در شرط (۵۶) صدق کند قابل نوشتن به فرم $Y=tI-J+B$ که در آن B ماتریسی است که $b_{ij}\neq 0$ فقط اگر $i\sim j$ در C_5. در این صورت $PYP^t=Y$ معادل است با $PBP^t=B$. هر ماتریس متقارن B با شرط‌های فوق قابل نوشتن به فرم $B=rA$ است که در آن A ماتریس مجاورت C_5 است. بنابراین $\vartheta(C_5)$ جواب بهینه مسأله زیر است.

$$\begin{aligned}\min\quad & t\\ & tI-J+rA\succeq 0.\end{aligned}$$

مقادیر ویژه A برابرند با $\{2,\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\}$. همچنین با استفاده از این که I,J با A جابجا می‌شوند، نتیجه می‌شود که مقادیر ویژه $tI-J+rA$ برابرند با $\{t-5+2r,t+\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\cdot r\}$. بنابراین $\vartheta(C_5)$ برابر است با

$$\min_r\max\{5-2r,\frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}\cdot r\}.$$

این در واقع یک برنامه‌ریزی خطی است و نقطه بهینه آن $r=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ است. بنابراین $\vartheta(C_5)=\sqrt{5}$.

□

در اثبات فوق از تقارن‌های گراف C_5 استفاده کردیم. دیدیم که می‌توان فرض کرد که Y بهینه نیز همان تقارن‌های C_5 را داراست. این ایده در محاسبات و اثبات‌های دیگری که در آنها هدف یافتن یک نقطه بهینه در یک برنامه‌ریزی نیمه معین با تعدادی تقارن است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثال با این ایده می‌توان نشان داد اگر گروه تقارن‌های G روی رئوس آن به صورت ترایا[۸۸] عمل کند آنگاه $\vartheta(G)\vartheta(\bar{G})=m$ که در آن m تعداد رئوس G است. برای اثبات این ادعا می‌توانید به مقاله لواز [۱۳] مراجعه کنید.

دیدیم که $\Theta(G)\leq\vartheta(G)$ و برای C_5 تساوی رخ می‌دهد. با این حال گراف‌هایی وجود دارد که با ازای آنها $\Theta(G)<\vartheta(G)$ اکید است. برای جزئیات بیشتر در این زمینه به [۱۴، ۱۵] مراجعه کنید. همچنین تعمیم‌هایی از عدد لواز وجود دارد که به آنها عدد اسکرایور[۸۹] و عدد زیگیدی[۹۰] می‌گویند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۱۶، ۱۷، ۱۸] و همچنین [۱۹] مراجعه کنید.

[۸۸] vertex transitive
[۸۹] Schrijver number
[۹۰] Szegedy number

تمرین ۱۶.۴ (آ) فرض کنید یک هم‌ریختی[۹۱] گرافی از G به G' وجود داشته باشد، یعنی $f : V \to V'$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $i \sim j$ دو رأس مجاور در V باشند آنگاه $f(i) \sim f(j)$ در G'. نشان دهید $\bar{\vartheta}(G) \leq \bar{\vartheta}(G')$.

(ب) قضیه ۱۱.۴ را به عنوان نتیجه‌ای از قسمت (آ) ثابت کنید.

تمرین ۱۷.۴ (آ) فرض کنید $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ بردارهای بهینه‌ای برای (۵۳) هستند. نشان دهید $\|\sum_i \mathbf{u}_i\|^2 = \vartheta(G)$.

(ب) تعریف کنید

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{u}_i\|}\mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{c} = \frac{1}{\|\sum_i \mathbf{u}_i\|}\sum_i \mathbf{u}_i.$$

در این صورت $\mathbf{w}_i$-ها و $\mathbf{c}$ بردارهای به طول یک هستند و $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0$ اگر $i \sim j$. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و $\sum_i \|\mathbf{u}_i\|^2 = 1$ نشان دهید

$$\sum_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{c} \rangle^2 \geq \vartheta(G).$$

(ج) تعریف کنید $x_i = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{c} \rangle^2$. نشان دهید که بردار $\mathbf{x}$ بدست آمده یک نقطه شدنی برای (۴۸) است. نتیجه بگیرید که برای هر گراف G داریم $\vartheta(G) \leq \alpha^*(G)$.

راهنمایی: برای هر پایه متعامد یکه $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d\}$ و بردار $\mathbf{b}$ داریم $\sum_j \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_i \rangle^2 = \|\mathbf{b}\|^2$.

۶.۴ بازی‌های یک-دوره

یک بازی یک-دوره با دو بازیکن[۹۲] با چهار مجموعه متناهی S, T, A, B و یک تابع $\Gamma : A \times B \times S \times T \to \{0, 1\}$ مشخص می‌شود. بازی با یک داور بین دو بازیکن که آنها را آذر و بابک می‌نامیم، انجام می‌شود. داور در ابتدای بازی $(s, t) \in S \times T$ را به طور تصافی انتخاب، و s را برای آذر و t را برای بابک ارسال می‌کند. سپس آذر $a \in A$ و بابک $b \in B$ را به عنوان پاسخ برای داور می‌فرستند. آذر و بابک برنده بازی هستند اگر $\Gamma(a, b, s, t) = 1$. توجه کنید که آذر و بابک در این بازی شریک هستند و نه رقیب. آنها می‌توانند قبل از شروع بازی روی یک استراتژی توافق کنند ولی بعد از شروع بازی نمی‌توانند با هم ارتباط داشته باشند. نکته دیگر این که در حالت کلی داور $(s, t) \in S \times T$ را با یک توزیع احتمال دلخواه از پیش تعیین شده $\pi(s, t)$ انتخاب می‌کند. با این حال در اینجا برای راحتی می‌توانید فرض کنید که این یک توزیع احتمال یکنواخت روی $S \times T$ است. پس داور هر $(s, t) \in S \times T$ را با احتمال $\pi(s, t) = \frac{1}{|S \times T|}$ انتخاب می‌کند.

به طور خلاصه مراحل انجام بازی به شرح زیر است:

۱. بازی با $\mathcal{G} = (A, B, S, T, \pi, \Gamma)$ مشخص می‌شود.

۲. داور $(s, t) \in S \times T$ را با احتمال $\pi(s, t)$ انتخاب، s را برای آذر و t را برای بابک ارسال می‌کند.

۳. آذر پس از مشاهده s عضو $a \in A$ را انتخاب و برای داور می‌فرستد. به همین ترتیب بابک پس از مشاهده t عضو $b \in B$ را انتخاب و برای داور می‌فرستد.

[۹۱] Homomorphism
[۹۲] Two-player one-round game

۴. داور بررسی می‌کند که آیا $\Gamma(a,b,s,t)=1$ یا خیر. آذر و بابک برنده‌اند اگر $\Gamma(a,b,s,t)=1$.

همان طور که گفتیم آذر و بابک قبل از شروع بازی می‌توانند روی یک استراتژی با هم توافق کنند. یک استراتژی برای آذر در واقع یک تابع $f:S\to A$ است به این صورت که اگر آذر s را دریافت کرد پاسخ $a=f(s)$ را ارسال می‌کند. به همین ترتیب یک استراتژی برای بابک با یک تابع $g:T\to B$ مشخص می‌شود. در این صورت احتمال برد آذر و بابک تحت استراتژی (f,g) برابر است با

$$\omega(\mathcal{G},f,g)=\sum_{s,t}\pi(s,t)\Gamma\big(f(s),g(t),s,t\big).$$

همچنین بیشینه احتمال برد آذر و بابک برابر است با

$$\omega(\mathcal{G})=\max_{f,g}\omega(\mathcal{G},f,g).$$

مثال ۱۸.۴ فرض کنید $A=B=S=T=\{0,1\}$ و π را توزیع یکنواخت روی $S\times T$ بگیرید، یعنی $\pi(s,t)=1/4$ برای هر $s,t\in\{0,1\}$. همچنین قرار دهید $\Gamma(a,b,s,t)=1$ اگر و فقط اگر $st=a+b(\mod 2)$. از آنجا که با احتمال $3/4$ داریم $st=0$، اگر آذر و بابک مستقل از s,t همواره پاسخ‌های $a=b=0$ را برای داور بفرستند آنگاه با احتمال $3/4$ بازی را می‌برند. در واقع می‌توان نشان داد که این بهترین استراتژی آذر و بابک است و بیشینه احتمال برد آنها در این بازی همان $3/4$ است.

مثال ۱۹.۴ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف دلخواه باشد. قرار دهید

$$S=V,\qquad T=V^2,\qquad A=\{1,2,3\},\qquad B=\{1,2,3\}^2.$$

همچنین π را توزیع یکنواخت روی $S\times T$ بگیرید. برای راحتی اعضای T را با جفت‌های $t=(t_1,t_2)$ و اعضای B را با جفت‌های $b=(b_1,b_2)$ نمایش می‌دهیم. تعریف کنید

$$\Gamma(a,b_1,b_2,s,t_1,t_2)=0\quad\Leftrightarrow\quad\big(s=t_1\wedge a\neq b_1\big)\vee\big(s=t_2\wedge a\neq b_2\big)\vee\big(t_1\sim t_2\wedge b_1=b_2\big).$$

به طور خلاصه آذر و بابک برنده‌اند اگر

(آ) پاسخ آنها هماهنگ باشد به این معنا که اگر s برابر یکی از t_1 یا t_2 بود آنگاه a برابر باشد با b_1 یا b_2 و

(ب) اگر $\{t_1,t_2\}$ یک یال در گراف بود آنگاه $b_1\neq b_2$.

فرض کنید که آذر مستقل از s همواره پاسخ $a=1$ را بدهد و همچنین بابک مستقل از $t=(t_1,t_2)$ همواره پاسخ $(b_1,b_2)=(1,2)$ را بدهد. در این صورت شرط (ب) همواره برقرار است (چون همواره داریم $b_1\neq b_2$). با این استراتژی شرط (آ) نیز در اکثر مواقع برقرار خواهد بود. پاسخ آذر و بابک فقط در صورتی هماهنگ نیست که داشته باشیم $s=t_2$ که احتمال آن برابر است با $1/|V|$. بنابراین با استراتژی بدیهی فوق آذر و بابک می‌توانند با احتمال $1-1/|V|$ ببرند.

بگذارید بررسی کنیم که آیا آذر و بابک می‌توانند با احتمال 1 برنده شوند. استراتژی آذر یک تابع $f:V\to\{1,2,3\}$ است که به آن می‌توان به عنوان یک رنگ‌آمیزی رأسی گراف G با سه رنگ نگاه کرد. به همین ترتیب استراتژی بابک یک تابع $g:V^2\to\{1,2,3\}^2$ است. حال اگر شرط (آ) همواره (با احتمال 1) برقرار باشد آنگاه باید داشته باشیم $g(t_1,t_2)=(f(t_1),f(t_2))$. همچنین اگر شرط (ب) همواره برقرار باشد، برای هر یال $t_1\sim t_2$ باید داشته باشیم $f(t_1)\neq f(t_2)$. نتیجه این که f یک رنگ‌آمیزی سره گراف G با سه رنگ است. نتیجه این که $\omega(\mathcal{G})=1$ اگر و فقط اگر G سه رنگ پذیر باشد.

مسأله محاسبه استراتژی بهینه برای بازی‌های یک-دوره و در واقع بدست آوردن بیشینه احتمال برد در آنها مسأله آسانی نیست. در مثال بالا دیدیم که مسأله سه رنگ پذیری در گراف‌ها را می‌توان به حالت خاصی از مسأله محاسبه بیشینه احتمال برد تبدیل کرد. بنابراین این مسأله نیز NP-سخت است. با این حال در اینجا می‌خواهیم با استفاده از برنامه‌ریزی نیمه معین تقریبی برای بیشینه احتمال برد بدست بیاوریم.

یک استراتژی (f, g) برای انجام بازی در نظر بگیرید. متغیرهای $x_a^s, y_b^t \in \{0, 1\}$ را به صورت زیر تعریف کنید. قرار دهید $x_a^s = 1$ اگر و فقط اگر $f(s) = a$ و همچنین $y_b^t = 1$ اگر و فقط اگر $g(t) = b$. حال توجه کنید که

$$\sum_a x_a^s = 1 \quad \forall s, \qquad\qquad \sum_b y_b^t = 1 \quad \forall t.$$

همچنین داریم

$$\omega(\mathcal{G}, f, g) = \sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)x_a^s y_b^t.$$

نتیجه این که $\omega(\mathcal{G})$ برابر است با جواب بهینه مسأله زیر.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)x_a^s y_b^t \\ & \sum_a x_a^s = 1 && \forall s, \\ & \sum_b y_b^t = 1 && \forall t, \\ & x_a^s \in \{0,1\}, && \forall a, s \\ & y_b^t \in \{0,1\}, && \forall b, t. \end{aligned} \tag{۵۷}$$

این مسأله بهینه‌سازی را می‌توان با یک برنامه‌ریزی نیمه معین تقریب زد. تابع هدف در اینجا یک تابع درجه دو بر حسب متغیرها است. بنابراین اگر بجای x_a^s بردار $\mathbf{v}_a^s$ و بجای y_b^t بردار $\mathbf{w}_b^t$ را قرار دهیم، تابع هدف یک تابع خطی برحسب ضرب داخلی‌های $\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t \rangle$ خواهد شد. برای جایگزینی قیدهای اول و دوم می‌توانیم بجای عدد 1 یک بردار $\mathbf{z}$ به طول یک قرار دهیم. نکته دیگر این که شرط $x_a^s \in \{0,1\}$ به همراه قید اول نتیجه می‌دهد که برای هر s داده شده دقیقاً یکی از x_a^s-ها برابر یک و بقیه برابر صفر هستند. بنابراین برای هر s و هر $a \neq a'$ داریم $x_a^s x_{a'}^s = 0$. به همین ترتیب برای هر t و هر $b \neq b'$ داریم $y_b^t y_{b'}^t = 0$. بنابراین برنامه‌ریزی نیمه معین زیر تخفیف داده شده (۵۷) است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t \rangle \\ & \sum_a \mathbf{v}_a^s = \mathbf{z} && \forall s, \\ & \sum_b \mathbf{w}_b^t = \mathbf{z} && \forall t, \\ & \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{v}_{a'}^s \rangle = 0, && \forall a \neq a', s, \\ & \langle \mathbf{w}_b^t, \mathbf{w}_{b'}^t \rangle = 0, && \forall b \neq b', t, \\ & \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t \rangle \geq 0, && \forall s, t, a, b, \\ & \|\mathbf{z}\|^2 = 1. \end{aligned} \tag{۵۸}$$

توجه کنید که قیدهای اول و دوم در اینجا آن طور که در برنامه‌ریزی‌های نیمه معین نیاز داریم به فرم ضرب داخلی نیستند. با این حال با استفاده از نامساوی کوش-شوارتز برای دو بردار دلخواه $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ داریم $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$ اگر و فقط اگر $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\rangle = \|\mathbf{z}_1\|^2 = \|\mathbf{z}_2\|^2$. پس این دو شرط را نیز می‌توان بر حسب ضرب داخلی نوشت. به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید (۵۸) معادل است با برنامه‌ریزی نیمه معین زیر.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t\rangle && \\
& \sum_a \|\mathbf{v}_a^s\|^2 = \sum_a \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{z}\rangle = 1 && \forall s,\\
& \sum_b \|\mathbf{w}_b^t\|^2 = \sum_b \langle \mathbf{w}_b^t, \mathbf{z}\rangle = 1 && \forall t,\\
& \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{v}_{a'}^s\rangle = 0, && \forall a\neq a', s,\\
& \langle \mathbf{w}_b^t, \mathbf{w}_{b'}^t\rangle = 0, && \forall b\neq b', t,\\
& \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t\rangle \geq 0, && \forall s,t,a,b,\\
& \|\mathbf{z}\|^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{۵۹}
$$

جواب بهینه برنامه‌ریزی نیمه معین فوق را با $\gamma(\mathcal{G})$ نمایش می‌دهیم. با توجه به توضیحات فوق داریم $\omega(\mathcal{G}) \leq \gamma(\mathcal{G})$ پس با برنامه‌ریزی نیمه معین می‌توان کران بالایی برای بیشینه احتمال برد بازی‌های یک-دوره بدست آورد.

تمرین ۲۰.۴ نشان دهید برای هر بازی $\mathcal{G}$ داریم $\gamma(\mathcal{G}) \leq 1$.

۷.۴ تکرار موازی بازی‌های یک-دوره

فرض کنید که بازی یک-دوره $\mathcal{G}$ به طور موازی n بار تکرار شود و در آن آذر و بابک برنده باشند اگر در هر یک از این n بازی برنده شوند. به این صورت که داور $(s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n)\in S^n\times T^n$ را با احتمال $\pi(s_1,t_1)\cdots\pi(s_n,t_n)$ انتخاب کند و s_i-ها را برای آذر و t_i-ها را برای بابک بفرستد. سپس آذر و بابک به عنوان پاسخ به ترتیب $(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$ و $(b_1,\ldots,b_n)\in B^n$ را برای داور بفرستند. آذر و بابک برنده خواهند بود اگر $\Gamma(a_i,b_i,s_i,t_i)=1$ برای هر i. بازی حاصل را با $\mathcal{G}^n$ نمایش می‌دهیم. پس داریم $\mathcal{G}^n = (A^n, B^n, S^n, T^n, \pi^n, \Gamma^n)$ که در آن منظور از π^n توضیع احتمال ضربی

$$\pi^n(s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^n \pi(s_i,t_i),$$

است و منظور از Γ^n تابع

$$\Gamma^n(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^n \Gamma(a_i,b_i,s_i,t_i),$$

است. حال سؤال این است که بیشینه احتمال برد $\mathcal{G}^n$، یعنی $\omega(\mathcal{G}^n)$ چه ارتباطی با $\omega(\mathcal{G})$ دارد؟

توجه کنید که اگر آذر و بابک هر یک از این n بازی را به طور مستقل بازی کنند آنگاه احتمال برد هر یک $\omega(\mathcal{G})$ خواهد بود، و احتمال این که همه بازی‌ها را ببرند برابر خواهد بود با $\omega(\mathcal{G})^n$. بنابراین داریم

$$\omega(\mathcal{G}^n) \geq \omega(\mathcal{G})^n. \tag{۶۰}$$

سؤال این است که آیا همواره تساوی اتفاق می‌افتد یا خیر؟ به عبارت دیگر آیا همواره به طور مستقل بازی کردن بهینه است یا خیر؟

تمرین ۲۱.۴ بازی $\mathcal{G} = (A, B, S, T, \pi, \Gamma)$ را در نظر بگیرید که در آن $A = B = S = T = \{0, 1\}$، و π توزیع یکنواخت روی $\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ است (پس $\pi(1,1) = 0$). همچنین $\Gamma(a, b, s, t) = 1$ اگر $s \vee a \neq t \vee b$. ادعا می‌کنیم که $\omega(\mathcal{G}) = 2/3$. اگر آذر و بابک همواره $a = b = 0$ را برای داور بفرستند در حالتی که (s, t) برابر $(0,1)$ یا $(1,0)$ است برنده می‌شوند. از طرف دیگر به راحتی قابل بررسی است که که آذر و بابک نمی‌توانند در هر سه حالت $(0,0), (0,1), (1,0)$ برنده شوند. پس داریم $\omega(\mathcal{G}) = 2/3$.

حال می‌خواهیم $\omega(\mathcal{G}^2)$ را حساب کنیم. استراتژی زیر برای $\mathcal{G}^2$ را در نظر بگیرید. آذر قرار می‌دهد $(a_1, a_2) = (0, 0)$ اگر $(s_1, s_2) = (0, 0)$ و در غیر این صورت قرار می‌دهد $(a_1, a_2) = (1, 1)$. پاسخ بابک هم مشابه آذر است. استدلال می‌کنیم که احتمال برد این استراتژی بابر است با $2/3$.

توجه کنید که اگر $(s_1, s_2) = (0, 0)$ آنگاه (t_1, t_2) می‌تواند برابر هر یک از اعضای $\{0,1\}^2$ باشد. در این صورت با استراتژی فوق آذر و بابک فقط در صورتی بازنده‌اند که $(t_1, t_2) = (0, 0)$. یعنی اگر $(s_1, s_2) = (0, 0)$ آذر و بابک در سه حالت از چهار حالت برنده‌اند.

اگر $(s_1, s_2) = (0, 1)$ آنگاه $(t_1, t_2) \in \{(0, 0), (1, 0)\}$ و در این صورت آذر و بابک در یک حالت از دو حالت برنده خواهند شد. تحلیل حالت $(s_1, s_2) = (1, 0)$ مشابه است.

اگر $(s_1, s_2) = (1, 1)$ آنگاه $(t_1, t_2) = (0, 0)$ و در این صورت بابک و آذر برنده می‌شود.

نتیجه این که از 9 حالت ممکن برای (s_1, s_2, t_1, t_2) آذر و بابک در $6 = 1 + 1 + 1 + 3$ حالت برنده‌اند. بنابراین احتمال برد این استراتژی برابر $2/3 = 6/9$ است. بنابراین $\omega(\mathcal{G}^2) \geq 2/3 = \omega(\mathcal{G})$ از طرفی به وضوح احتمال برد $\mathcal{G}^2$ (یعنی دو کپی $\mathcal{G}$) نمی‌تواند از احتمال برد $\mathcal{G}$ بیشتر باشد. پس داریم $\omega(\mathcal{G}^2) = \omega(\mathcal{G}) = 2/3$.

با توجه به مثال فوق می‌بینیم که انتظار درستی نیست که در (۶۰) همواره تساوی داشته باشیم.

فرض کنید که $\omega(\mathcal{G}) = 1$. در این صورت با استفاده از (۶۰) داریم $\omega(\mathcal{G}^n) = 1$. حال فرض کنید $\omega(\mathcal{G}) < 1$. در این صورت با استفاده از $\omega(\mathcal{G}^n) \leq \omega(\mathcal{G})$ نتیجه می‌گیریم که $\omega(\mathcal{G}^n) < 1$. بیشتر از این، اگر چه $\omega(\mathcal{G}^n)$ و $\omega(\mathcal{G})^n$ لزوماً برابر نیستند، انتظار داریم که $\omega(\mathcal{G}^n)$ به سمت صفر میل کند وقتی $n \to \infty$. حتی بیشتر از این، انتظار داریم که $\omega(\mathcal{G}^n)$ به طور نمایی به صفر می‌کند.

قضیه ۲۲.۴ برای هر بازی یک-دوره $\mathcal{G}$ که $\omega(\mathcal{G}) < 1$ داریم $\lim_{n\to\infty} \omega(\mathcal{G}^n) = 0$ و دنباله $\omega(\mathcal{G}^n)$ به طور نمایی به سمت صفر میل می‌کند.

قضیه فوق ابتدا توسط راز[۹۳] در سال ۱۹۹۸ ثابت شد [۲۰] و بعد از آن هولنشتاین[۹۴] در سال ۲۰۰۷ اثبات دیگری از آن ارائه کرد [۲۱]. با این حال در حالت خاصی که بازی یکتا باشد، این قضیه توسط فایجی[۹۵] و لواز در سال ۱۹۹۲ ثابت شد [۲۲]. در واقع همین دو نفر بودند که برای اولین بار از برنامه‌ریزی نیمه معین برای تقریب زدن بیشینه احتمال برد بازی‌های یک-دوره استفاده کردند.

[۹۳] Raz

[۹۴] Holenstein

[۹۵] Feige

به بازی‌های یکتا[۹۶] بپردازیم. بازی یک-دوره $\mathcal{G} = (A, B, S, T, \pi, \Gamma)$ را یک بازی یکتا نامیم اگر $A = B$ و برای هر $(s,t) \in S \times T$ جایگشت $\sigma_{st} : A \to A$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\Gamma(a,b,s,t) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \sigma_{st}(a). \tag{۶۱}$$

به عبارت دیگر برای هر پاسخ a از آذر، دقیقاً یک $b \in A$ وجود داشته باشد که $\Gamma(a,b,s,t) = 1$ و بالعکس برای هر پاسخ b از بابک دقیقاً یک $a \in A$ وجود داشته باشد که $\Gamma(a,b,s,t) = 1$. بازی‌های یکتا دسته بسیار مهمی از بازی‌های یک-دوره هستند که حدس بازی‌های یکتا[۹۷] در مورد آنها، یکی از مهم‌ترین مسأله‌های باز علوم کامپیوتر است [۲۳].

در اینجا قضیه ۲۲.۴ را در حالتی که $\mathcal{G}$ یکتا باشد ثابت می‌کنیم. ایده اثبات ما نیز استفاده از برنامه‌ریزی نیمه معین تخفیف داده شده است. دیدیم که $\omega(\mathcal{G}) \leq \gamma(\mathcal{G})$ که در آن $\gamma(\mathcal{G})$ جواب بهینه برنامه‌ریزی نیمه معین (۵۹) است. حال فرض کنید که بدانیم $\gamma(\mathcal{G}) < 1$ و همچنین بدانیم که $\gamma(\mathcal{G}^n)$ برابر است با $\gamma(\mathcal{G})^n$. در این صورت خواهیم داشت

$$\omega(\mathcal{G}^n) \leq \gamma(\mathcal{G}^n) = \gamma(\mathcal{G})^n.$$

که اثبات را تمام می‌کند.

متأسفانه حدس ما که $\gamma(\mathcal{G}^n)$ برابر است با $\gamma(\mathcal{G})^n$ درست نیست (یا حداقل نمی‌دانیم چطور آن را ثابت کنیم). بنابراین نیاز به یک برنامه‌ریزی نیمه معین دیگر داریم.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t\rangle & & (۶۲)\\
& \sum_a \|\mathbf{v}_a^s\|^2 = \sum_a \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{z}\rangle = 1 & \forall s, &\\
& \sum_b \|\mathbf{w}_b^t\|^2 = \sum_b \langle \mathbf{w}_b^t, \mathbf{z}'\rangle = 1 & \forall t, &\\
& \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{v}_{a'}^s\rangle = 0, & \forall a \neq a', s, &\\
& \langle \mathbf{w}_b^t, \mathbf{w}_{b'}^t\rangle = 0, & \forall b \neq b', t, &\\
& \|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{z}'\|^2 = 1. & &
\end{aligned}$$

در برنامه‌ریزی نیمه معین فوق اگر فرض کنیم $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ و شرط $\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t\rangle \geq 0$ را اضافه کنیم به برنامه‌ریزی نیمه معین قبلی (۵۹) می‌رسیم. پس اگر جواب بهینه برنامه‌ریزی نیمه معین فوق را $\gamma'(\mathcal{G})$ بنامیم داریم

$$\omega(\mathcal{G}) \leq \gamma(\mathcal{G}) \leq \gamma'(\mathcal{G}).$$

به علاوه می‌توان نشان داد که $\gamma'(\mathcal{G}) \leq 1$. برای این کار یک نقطه شدنی (۶۲) را در نظر بگیرید. با استفاده از یکتا بودن بازی (۶۱) و نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b,s,t} \pi(s,t)\Gamma(a,b,s,t)\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_b^t\rangle &= \sum_{s,t} \pi(s,t) \sum_a \langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t\rangle & (۶۳)\\
&\leq \sum_{s,t} \pi(s,t) \sum_a \|\mathbf{v}_a^s\| \cdot \|\mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t\| & (۶۴)\\
&\leq \sum_{s,t} \pi(s,t) \sum_a \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}_a^s\|^2 + \|\mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t\|^2) & (۶۵)
\end{aligned}$$

---
[۹۶] Unique games
[۹۷] Unique games conjecture

$$= \sum_{s,t} \pi(s,t) \frac{1}{2} (\sum_a \|\mathbf{v}_a^s\|^2 + \sum_b \|\mathbf{w}_b^t\|^2) \tag{۶۶}$$

$$= \sum_{s,t} \pi(s,t) \tag{۶۷}$$

$$= 1, \tag{۶۸}$$

که در خط چهارم از این که σ_{st} یک جایگشت است استفاده کردیم.

لم ۲۳.۴ برای بازی یکتای $\mathcal{G}$ داریم $\gamma'(\mathcal{G}) = 1$ اگر و فقط اگر $\omega(\mathcal{G}) = 1$

اثبات: توجه کنید که $\omega(\mathcal{G}) \leq \gamma'(\mathcal{G})$ از طرف دیگر در بالا دیدیم که $\gamma'(\mathcal{G}) \leq 1$. بنابراین اگر $\omega(\mathcal{G}) = 1$ آنگاه $\gamma'(\mathcal{G}) = 1$.

حال با فرض $\gamma'(\mathcal{G}) = 1$ نشان می‌دهیم $\omega(\mathcal{G}) = 1$ یک نقطه بهینه (۶۲) را نظر بگیرید. با فرض $\gamma'(\mathcal{G}) = 1$ نامساوی‌های (۶۳) تا (۶۸) تبدیل به تساوی می‌شوند. به طور خاص برای هر s, t و a باید داشته باشیم

$$\langle \mathbf{v}_a^s, \mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t \rangle = \|\mathbf{v}_a^s\| \cdot \|\mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t\| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_a^s = \mathbf{w}_{\sigma_{st}(a)}^t. \tag{۶۹}$$

به طور مشابه برای هر s, t و b باید داشته باشیم

$$\mathbf{v}_{\sigma_{st}^{-1}(b)}^s = \mathbf{w}_b^t. \tag{۷۰}$$

برای هر بردار $\mathbf{u}$ تعریف کنید

$$\Phi_{\mathbf{u}} := \{(s,a) : \mathbf{v}_a^s = \mathbf{u}\} \cup \{(t,b) : \mathbf{w}_b^t = \mathbf{u}\}.$$

توجه کنید که با استفاده از $\sum_a \|\mathbf{v}_a^s\|^2 = \sum_b \|\mathbf{w}_b^t\|^2 = 1$ حداقل برای یک بردار $\mathbf{u} \neq 0$ داریم $\Phi_{\mathbf{u}} \neq \emptyset$. نکته دیگر این که با استفاده از شرط‌های سوم و چهارم (۶۲) برای هر s حداکثر یک $a \in A$ وجود دارد به طوری که $(s,a) \in \Phi_{\mathbf{u}}$. به همین ترتیب برای هر t حداکثر یک $b \in B$ وجود دارد به طوری که $(t,b) \in \Phi_{\mathbf{u}}$. از طرف دیگر برای مثال اگر $(s_0, a_0) \in \Phi_{\mathbf{u}}$ آنگاه با استفاده از (۶۹) برای هر t داریم $(t, \sigma_{s_0t}(a_0)) \in \Phi_{\mathbf{u}}$. به همین ترتیب اگر $(t_0, b_0) \in \Phi_{\mathbf{u}}$ آنگاه با استفاده از (۷۰) برای هر s داریم $(s, \sigma_{st_0}^{-1}(b_0)) \in \Phi_{\mathbf{u}}$. با کنار هم گذاشتن این خواص نتیجه می‌شود که (اگر $\Phi_{\mathbf{u}}$ ناتهی باشد) برای هر s دقیقاً یک $a = a_s$ وجود دارد به طوری که $(s, a_s) \in \Phi$ و برای هر t دقیقاً یک $b = b_t$ وجود دارد که $(t, b_t) \in \Phi_{\mathbf{u}}$. حال استراتژی زیر برای بازی $\mathcal{G}$ را در نظر بگیرید. آذر در صورت دریافت s خروجی a_s را می‌دهید و بابک در صورت دریافت t خروجی b_t را می‌دهد. ادعا می‌کنیم که احتمال برد آذر و بابک با این استراتژی برابر یک است. برای اثبات این ادعا کافی است توجه کنیم که با استفاده از توضیحات فوق داریم $b_t = \sigma_{st}(a_s)$.

□

۸.۴ برنامه‌ریزی نیمه معین دوبخشی

توجه کنید که برنامه‌ریزی نیمه معین (۶۲) در اصطلاح دوبخشی است به این معنی که بردارهای متغیر آن را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد به طوری که قیدهای مسأله فقط برحسب ضرب داخلی بردارهای هر یک از دو بخش باشند و همچنین تابع

هدف ترکیبی خطی از ضرب داخلی‌های یک بردار از بخش اول و یک بردار از بخش دوم باشد. در حالت کلی یک برنامه‌ریزی نیمه معین دوبخشی به فرم زیر است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,k} c_{ik}\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_k\rangle \\ & \sum_{i,j} a^e_{ij}\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \alpha_e && \forall e, \\ & \sum_{k,\ell} b^f_{k\ell}\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_\ell\rangle = \beta_f && \forall f, \end{aligned} \tag{۷۱}$$

این برنامه‌ریزی نیمه معین را با $\mathcal{S}$ و جواب بهینه آن را با $\xi(\mathcal{S})$ نمایش دهید.

تمرین ۲۴.۴ نشان دهید که دوگان (۷۱) برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_e \alpha_e x_e + \sum_f \beta_f y_f \\ & \begin{pmatrix} \sum_e x_e A^e & 0 \\ 0 & \sum_f y_f B^f \end{pmatrix} \succeq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۷۲}$$

تمرین ۲۵.۴ با استفاده از دوگانگی قوی نتیجه بگیرید که اگر $\mathcal{S}$ اکیداً شدنی باشد آنگاه جواب برنامه‌ریزی نیمه معین (۷۲) همان $\xi(\mathcal{S})$ است. همچنین ثابت کنید که نقطه شدنی برای (۷۲) وجود دارد به طوری که

$$\sum_e \alpha_e x_e = \sum_f \beta_f y_f = \frac{1}{2}\xi(\mathcal{S}).$$

راهنمایی: از تمرین ۱۳.۳ استفاده کنید.

فرض کنید $\mathcal{S}'$ یک برنامه‌ریزی نیمه معین دوبخشی دیگر به فرم (۷۱) باشد با ضرایب $\cdots, c'_{i'j'}, a'^{e'}_{i'j'}$. در این صورت برنامه‌ریزی نیمه معین $\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,i',k,k'} c_{ik}c'_{i'k'}\langle \mathbf{v}_{ii'}, \mathbf{w}_{kk'}\rangle \\ & \sum_{i,i',j,j'} a^e_{ij}a'^{e'}_{i'j'}\langle \mathbf{v}_{ii'}, \mathbf{v}_{jj'}\rangle = \alpha_e\alpha'_{e'} && \forall e, e', \\ & \sum_{k,k',\ell,\ell'} b^f_{k\ell}b'^{f'}_{k'\ell'}\langle \mathbf{w}_{kk'}, \mathbf{w}_{\ell\ell'}\rangle = \beta_f\beta'_{f'} && \forall f, f', \end{aligned} \tag{۷۳}$$

توجه کنید که $\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}'$ نیز خود یک برنامه‌ریزی نیمه معین دوبخشی است.

قضیه ۲۶.۴ اگر $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ اکیداً شدنی باشند آنگاه $\xi(\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}') = \xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}')$.

اثبات: اثبات $\xi(\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}') \geq \xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}')$ ساده است. کافی است بردارهای بهینه $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_k$ برای $\mathcal{S}$ و بردارهای بهینه $\mathbf{v}'_{i'}, \mathbf{w}'_{k'}$ برای $\mathcal{S}'$ را گرفته و قرار دهیم $\mathbf{v}_{ii'} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}'_{i'}$ و $\mathbf{w}_{kk'} = \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}'_{k'}$. به راحتی قابل بررسی است که بردارهای $\mathbf{v}_{ii'}, \mathbf{w}_{kk'}$ یک نقطه شدنی $\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}'$ هستند و مقدار تابع هدف برای آنها برابر است با $\xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}')$. در نتیجه داریم $\xi(\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}') \geq \xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}')$.

برای اثبات طرف دیگر از دوگانگی قوی استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که با استفاده از تمرین ۲۴.۴ دوگان $\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}'$ برابر است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e,e'} \alpha_e\alpha'_{e'}x_{ee'} + \sum_{f,f'} \beta_f\beta'_{f'}y_{ff'} \\ & \begin{pmatrix} \sum_{e,e'} x_{ee'}A^e \otimes A'^{e'} & 0 \\ 0 & \sum_{f,f'} y_{ff'}B^f \otimes B'^{f'} \end{pmatrix} \succeq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & C\otimes C' \\ C^t \otimes C'^t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۷۴}$$

از طرف دیگر طبق تمرین ۲۵.۴ نقاط شدنی x_e, y_f برای دوگان $\mathcal{S}$ و نقاط شدنی $x'_{e'}, y'_{f'}$ برای دوگان $\mathcal{S}'$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_e \alpha_e x_e = \sum_f \beta_f y_f = \frac{1}{2}\xi(\mathcal{S}),$$

و

$$\sum_{e'} \alpha'_{e'}x'_{e'} = \sum_{f'} \beta'_{f'}y'_{f'} = \frac{1}{2}\xi(\mathcal{S}').$$

تعریف کنید $x_{ee'} = 2x_ex'_{e'}$ و $y_{ff'} = 2y_fy'_{f'}$. ادعا می‌کنیم $x_{ee'}, y_{ff'}$ برای (۷۴) شدنی است. قرار دهید

$$M = \begin{pmatrix} \sum_e x_eA^e & 0 \\ 0 & \sum_f y_fB^f \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & 0 \end{pmatrix},$$

و ماتریس‌های M', P' را به طور مشابه تعریف کنید. از آنجا که x_e, y_f شدنی است داریم $M \succeq P$. همچنین با استفاده از تمرین ۱۲.۳ نتیجه می‌گیریم $M \succeq -P$. به همین ترتیب داریم $M' \succeq \pm P'$. در نتیجه با استفاده از تمرین ۱۹.۳ داریم

$$M \otimes M' \succeq P \otimes P'.$$

حال توجه کنید که

$$\begin{pmatrix} \sum_{e,e'} x_ex'_{e'}A^e \otimes A'^{e'} & -\frac{1}{4}C\otimes C' \\ -\frac{1}{4}C^t \otimes C'^t & \sum_{f,f'} y_fy'_{f'}B^f \otimes B'^{f'} \end{pmatrix},$$

یک زیرماتریس $M\otimes M' - P\otimes P'$ است. بنابراین $x_{ee'} = 2x_ex'_{e'}$ و $y_{ff'} = 2y_fy'_{f'}$ متناظر با یک نقطه شدنی (۷۴) است. تابع هدف به ازای این نقطه شدنی برابر است با

$$\begin{aligned} \sum_{e,e'} \alpha_e\alpha'_{e'}x_{ee'} + \sum_{f,f'} \beta_f\beta'_{f'}y_{ff'} &= \sum_{e,e'} 2\alpha_e\alpha'_{e'}x_ex'_{e'} + \sum_{f,f'} 2\beta_f\beta'_{f'}y_fy'_{f'} \\ &= 2\big(\sum_e \alpha_e x_e\big)\cdot\big(\sum_{e'}\alpha'_{e'}x'_{e'}\big) + 2\big(\sum_f \beta_f y_f\big)\cdot\big(\sum_{f'}\beta'_{f'}y'_{f'}\big) \\ &= \frac{1}{2}\xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}') + \frac{1}{2}\xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}') \\ &= \xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}'). \end{aligned}$$

در نتیجه $\xi(\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}') \leq \xi(\mathcal{S})\xi(\mathcal{S}')$.

□

قضیه زیر نتیجه‌ای ساده از قضیه فوق است.

قضیه ۲۷.۴ برای هر بازی یکتای $\mathcal{G}$ داریم $\gamma'(\mathcal{G}^n) = \gamma'(\mathcal{G})^n$.

اثبات: کافی است توجه کنیم که اگر برنامه‌ریزی نیمه معین (۶۲) برای بازی $\mathcal{G}$ و $\mathcal{G}'$ را $\mathcal{S}$ و $\mathcal{S}'$ بنامیم، آنگاه این برنامه‌ریزی نیمه معین متناظر با بازیی که در آن $\mathcal{G}$ و $\mathcal{G}'$ به طور موازی انجام می‌شوند برابر است با $\mathcal{S}\tilde{\otimes}\mathcal{S}'$. □

حال می‌توانیم اثباتی از قضیه ۲۲.۴ در حالتی که $\mathcal{G}$ یکتا باشد ارائه دهیم. اگر $\omega(\mathcal{G}) < 1$ آنگاه طبق لم ۲۳.۴ داریم $\gamma'(\mathcal{G}) < 1$. از طرف دیگر طبق قضیه فوق داریم $\gamma'(\mathcal{G}^n) = \gamma'(\mathcal{G})^n$. در نتیجه

$$\omega(\mathcal{G}^n) \leq \gamma'(\mathcal{G}^n) = \gamma'(\mathcal{G})^n,$$

به طور نمایی به صفر میل می‌کند.

۵ مطالعات بیشتر

برنامه‌ریزی نیمه معین در مسأله‌های زیادی به کار برده شده است که در اینجا فقط به تعداد کمی از آنها پرداختیم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۱، ۲، ۳، ۴، ۵] مراجعه کنید. برای مثال در [۱] می‌توانید در مورد کاربرد برنامه‌ریزی نیمه معین در مسأله مغایرت یا ناهم‌خوانی[۹۸] در نظریه اعداد مطالعه کنید.

در این درسنامه مثال‌هایی دیدیم که در آنها یک مسأله بهینه‌سازی درجه دو به یک برنامه‌ریزی نیمه معین تخفیف داده شد. این ایده کلی را می‌توان برای همه بهینه‌سازی درجه دو بکار برد. به طور کلی از برنامه‌ریزی نیمه میعن در مسأله‌های بهینه‌سازی چندجمله‌ای نیز می‌توان استفاده کرد [۲۴].

یکی از کاربردهای برنامه‌ریزی نیمه معین اثبات قضایای ضرب مستقیم است که در اینجا به دو مورد از آن اشاره کردیم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۲۵] مراجعه کنید.

همان طور که دیدیم برنامه‌ریزی نیمه معین تعمیمی از برنامه‌ریزی خطی است. در واقع برنامه‌ریزی نیمه معین یک برنامه‌ریزی خطی روی فضای ماتریس‌های مثبت نیمه معین است که خود یک مجموعه محدب مخروطی است. با تعمیم این ایده می‌توان برنامه‌ریزی‌های مخروطی را در نظر گرفت که برای آنها نیز دوگانگی ضعیف و قوی برقرار است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۲۶] مراجعه کنید.

برای حل برنامه‌ریزی‌های نیمه معین در حالت‌هایی خاص می‌توان از الگوریتم‌هایی غیر از الگوریتم‌های مرسوم برای حل برنامه‌ریزی‌های محدب استفاده کرد. برای اطلاع در مورد این الگوریتم‌ها و همچنین کاربردهای آنها به [۲۷، ۲۸] مراجعه کنید.

مراجع

[1] L. Lovász, Semidefinite programs and combinatorial optimization, available at: http://www.cs.elte.hu/~lovasz/semidef.ps

[2] B. Gärtner and J. Matoušek, Approximation Algorithms and Semidefinite Programming, Springer (2012).

[3] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer (1993).

[4] J. Matoušek and B. Gärtner, Understanding and Using Linear Programming, Springer (2007).

[۹۸] Discrepancy

[5] L. Tunçel, Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization, AMS, Fields Institute Monographs (2010).

[6] M. X. Goemans and D. P. Williamson, The primal-dual method for approximation algorithms and its application to network design problems. In D. Hochbaum, editor, Approximation algorithms for NP-hard problems, chapter 4, pages 144-191. PWS Publishing Company (1997), available at `http://math.mit.edu/~goemans/PAPERS/book-ch4.pdf`

[7] D. P. Williamson and D. B. Shmoys, The Design of Approximation Algorithms, Cambridge University Press (2010).

[8] N. R. Devanur, K. Jain, R. D. Kleinberg, Randomized Primal-Dual analysis of RANKING for Online BiPartite Matching, SODA 2013.

[9] M. X. Goemans and D. P. Williamson, .878-Approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT, Proc. 26th ACM Symp. on Theory of Computing (1994), 422-431.

[10] M. X. Goemans and D. P. Williamson, Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiablity problems using semidefinite programming, J. ACM 42 (1995), 1115-1145.

[11] M. Lewin, D. Livnat, and U. Zwick, Improved rounding techniques for the MAX-2SAT and MAX DI-CUT problems, Lecture Notes in Computer Science, Volume 2337, 67-82 (2002).

[12] C. E. Shannon, The zero-error capacity of a noisy channel, IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-2, no. 3, pp. 8-19, (1956).

[13] L. Lovaśz, On the Shannon capacity of graphs, IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979), 1-7.

[14] W. Haemers, On some problems of Lovász concerning the Shannon capacity of a graph, IEEE Trans. Inform. Theory 25 (1979), 231-232.

[15] N. Alon, The Shannon capacity of a union, Combinatorica 18 (1998), 301-310.

[16] A. Schrijver, A comparison of the Delsarte and Lovaśz bounds, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 25, no. 4, pp. 425-429, 1979.

[17] R. J. McEliece, E. R. Rodemich,and H. C. Rumsey Jr. ,The Lovász bound and some generalizations, Journal of Combinatorics and Information Systems Science, vol. 3, no. 3, pp. 134-152, 1978.

[18] M. Szegedy, A note on the ϑ number of Lovaśz and the generalized Delsarte bound, in Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1994, pp. 36-39.

[19] D. E. Knuth, The Sandwich Theorem, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 1, no. 1, p. A1, 1994.

[20] R. Raz, A parallel repetition theorem, SIAM J. Comput., 27(3):763-803 (1998).

[21] T. Holenstein, Parallel repetition: simplifications and the no-signaling case, In Proc. 39th ACM Symp. on Theory of Computing, pages 411-419 (2007).

[22] U. Feige and L. Lovász, Two-prover one-round proof systems: their power and their problems (extended abstract), STOC '92 Proceedings of the twenty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing Pages 733-744 (1992).

[23] S. Khot, On the power of unique 2-prover 1-round games, In Proc. 34th ACM Symp. on Theory of Computing, pages 767-775 (2002).

[24] Pablo A. Parrilo, Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems, Math. Program., Ser. B 96: 293–320 (2003).

[25] R. Mittal and M. Szegedy, Product rules in semidefinite programming, In Proc. 16th Fund. Computation Theory (FCT), pages 435-445. 2007.

[26] L. Tunçel and H. Wolkowicz, Strong duality and minimal representations for cone optimization, Technical Report CORR 2008-07, Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, August 2008.

[27] S. Arora, E. Hazan, and S. Kale, The Multiplicative Weights Update Method: a Meta-Algorithm and Applications, Volume 8 (2012) Article 6 pp. 121-164.

[28] R. Jain, Z. Ji, S. Upadhyay, J. Watrous, QIP = PSPACE, Communications of the ACM, Vol. 53 No. 12, pp. 102-109.