تئوری اطلاعات کوانتومی ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱

مدرس: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری نویسنده: محمد مهدی مجاهدیان

جلسه ۲۲

تا اینجا خواص مربوط به آنتروپی را بیان کردیم. جهت اثبات این خواص نیاز به ابزارهایی داریم که در اینجا بیان می‌کنیم.

در این جلسه از $\mathbb{R}^+$ برای اشاره به اعداد حقیقی نامنفی (شامل صفر) استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که برای هر ماتریس هرمیتی A و تابع دلخواه $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ عملگر $f(A)$ این گونه تعریف می‌شود: اگر $A=\sum_i \lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|$ قطری شدن A در یک پایه متعامد یکه باشد آنگاه قرار می‌دهیم

$$f(A)=\sum_i f(\lambda_i)|v_i\rangle\langle v_i|.$$

همچنین نامساوی جنسن [1] را نیز یادآوری می‌کنیم:

نامساوی جنسن: اگر $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ تابعی محدب و $p_i\geq 0$، $\sum_{i=1}^n p_i=1$ باشد، داریم:

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)\geq f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right).$$

۱ نامساویهایی در مورد اثر ماتریس‌ها

قضیه ۱ نامساوی کلین [2]: اگر $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ تابعی محدب باشد و A و B عملگرهای هرمیتی باشند، داریم:

$$tr[f(A)-f(B)]\geq tr[(A-B)f'(B)] \tag{۱}$$

بعلاوه اگر f اکیدا محدب باشد، تساوی تنها زمانی برقرار است که $A=B$ باشد.

اثبات: ابتدا حالت خاصی که ماتریس‌های A و B یک بعدی (یعنی یک عدد باشند) را در نظر بگیرید. آنوقت رابطه بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(a)-f(b)\geq (a-b)f'(b).$$

اما با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$f(a)-f(b)\geq (a-b)\cdot f'(\eta),\ \forall\eta\in[a,b] \tag{۲}$$

---

[1] Jensen inequality

[2] Klein inequality

پس باید ثابت کنیم که

$$(a-b)\cdot f'(\eta) \geq (a-b)f'(b).$$

دو حالت در نظر می‌گیریم: $a \geq b$ و $a < b$. در حالت اول باید نشان دهیم $f'(\eta) \geq f'(b)$ که بدلیل اینکه $f'(t)$ تابعی صعودی است برقرار می‌باشد. اثبات حالت دوم مشابه است.

حال حالت ماتریسی نامساوی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i| \\ B &= \sum_j \gamma_j |\omega_j\rangle\langle \omega_j| \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_i f(\lambda_i)|v_i\rangle\langle v_i|, \\ f(B) &= \sum_j f(\gamma_j)|\omega_j\rangle\langle \omega_j|, \\ f'(B) &= \sum_j f'(\gamma_j)|\omega_j\rangle\langle \omega_j|, \\ Bf'(B) &= \sum_j \gamma_j f'(\gamma_j)|\omega_j\rangle\langle \omega_j|. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\text{tr}[f(A)-f(B)] = \text{tr}[f(A)] - \text{tr}[f(B)] = \sum_i f(\lambda_i) - \sum_j f(\gamma_j)$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \text{tr}[(A-B)f'(B)] &= \text{tr}[Af'(B)] - \text{tr}[Bf'(B)] \\ &= \text{tr}[Af'(B)] - \sum_j \gamma_j f'(\gamma_j). \end{aligned}$$

جهت محاسبه $\text{tr}[Af'(B)]$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[Af'(B)] &= \mathrm{tr}\big[\big(\sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|\big)\big(\sum_j f'(\gamma_j)|\omega_j\rangle\langle\omega_j|\big)\big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\sum_{i,j} \lambda_i f'(\gamma_j)|v_i\rangle\langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|\big] \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i f'(\gamma_j)\mathrm{tr}\big[|v_i\rangle\langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|\big] \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i f'(\gamma_j)\mathrm{tr}\big[\langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|v_i\rangle\big] \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i f'(\gamma_j)|\langle v_i|\omega_j\rangle|^2
\end{aligned}
$$

اما توجه کنید که از متعامد یکه بودن پایه‌های $\{|v_i\rangle\}$ و $\{|\omega_j\rangle\}$ نتیجه می‌شود:[۳]

$$
\sum_i |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 = 1, \quad \forall j; \qquad \sum_j |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 = 1, \quad \forall i.
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[f(A) - f(B)] &= \sum_i [f(\lambda_i) - f(\gamma_j)] \\
&= \sum_{i,j} [f(\lambda_i)|\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 - f(\gamma_j)|\langle v_i|\omega_j\rangle|^2] \\
&= \sum_{i,j} |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 [f(\lambda_i)| - f(\gamma_j)].
\end{aligned}
$$

به طور مشابه

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}[Bf'(B)] &= \sum_i \gamma_j f'(\gamma_j). \\
&= \sum_{i,j} \gamma_j f'(\gamma_j)|\langle v_i|\omega_j\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$
\sum_{i,j} |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 [f(\lambda_i)| - f(\gamma_j)] \geq \sum_{i,j} |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 [\lambda_i f'(\gamma_j) - \gamma_j f'(\gamma_j)]
$$

---

[۳] این رابطه درست است زیرا

$$
\begin{aligned}
\sum_i |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 = \sum_i \langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|v_i\rangle = \sum_i \mathrm{tr}[\langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|v_i\rangle] = \sum_i \mathrm{tr}[|v_i\rangle\langle v_i|\omega_j\rangle\langle\omega_j|] \\
= \mathrm{tr}(\big[\sum_i |v_i\rangle\langle v_i|\big]|\omega_j\rangle\langle\omega_j|) = \mathrm{tr}(I|\omega_j\rangle\langle\omega_j|) = 1.
\end{aligned}
$$

یا به عبارت دیگر

$$\sum_{i,j} |\langle v_i|\omega_j\rangle|^2 \Big[f(\lambda_i)| - f(\gamma_j) - (\lambda_i - \gamma_j) f'(\gamma_j) \Big] \geq 0$$

که نامساوی‌ای درست است زیرا عبارت داخل پرانتز نامنفی است (این همان حالت اسکالر نامساوی است). $\square$

قضیه ۲ نامساوی پیرل[۴]: اگر f تابعی محدب باشد و A عملگر هرمیتی باشد، داریم:

- برای هر بردار $|e\rangle$ به طول واحد

$$\langle e|f(A)|e\rangle \geq f(\langle e|A|e\rangle). \tag{۳}$$

- برای هر پایه متعامد یکه $\{|e_i\rangle\}$

$$tr[f(A)] \geq \sum_{i=1}^{n} f(\langle e_i|A|e_i\rangle). \tag{۴}$$

اثبات: کافی است که قسمت اول قضیه را ثابت کنیم زیرا قسمت اول، قسمت دوم را نتیجه می‌دهد:

$$\mathrm{tr}[f(A)] = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i|f(A)|e_i\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} f(\langle e_i|A|e_i\rangle).$$

برای اثبات قسمت اول با توجه به هرمیتی بودن A داریم:

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i| \Rightarrow f(A) = \sum_i f(\lambda_i)|v_i\rangle\langle v_i|.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\langle e|f(A)|e\rangle =& \langle e| \sum_i f(\lambda_i)|v_i\rangle\langle v_i|e\rangle \\ =& \sum_i f(\lambda_i)\langle e|v_i\rangle\langle v_i|e\rangle \\ =& \sum_i f(\lambda_i)|\langle e|v_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

از طرفی با استدلال مشابهی که در زیرنویس ۳ داشتیم داریم: $\sum_i |\langle e|v_i\rangle|^2 = 1$. حال با استفاده از نامساوی جنسن:

$$\begin{aligned}\sum_i f(\lambda_i)|\langle e|v_i\rangle|^2 \geq& f(\sum_i \lambda_i |\langle e|v_i\rangle|^2) \\ =& f(\sum_i \lambda_i \langle e|v_i\rangle\langle v_i|e\rangle) \\ =& f(\langle e|[\sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|]|e\rangle) \\ =& f(\langle e|A|e\rangle).\end{aligned}$$

$\square$

[۴] Peierl inequality

۲ نامساوی‌های عملگری

در اینجا به معرفی توابع عملگر صعودی[۵] و توابع عملگر محدب[۶] می‌پردازیم.

تعریف ۳ تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را عملگر صعودی گویند هرگاه برای هر دو عملگر مثبت نیمه معین A و B رابطه زیر برقرار باشد:

$$A\leq B\Rightarrow f(A)\leq f(B).$$

در رابطه بالا، $A\leq B$ بدین معنی است که عملگر $B-A$ مثبت نیمه معین است. توجه کنید که دامنه تابع f اعداد حقیقی نامنفی است و آن را روی ماتریس‌های مثبت نیمه معین A، B اعمال کرده‌ایم.

تعریف ۴ تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را عملگر محدب گویند هرگاه برای هر دو عملگر A و B رابطه زیر برقرار باشد:

$$f(pA+(1-p)B)\leq pf(A)+(1-p)f(B),\qquad \forall p\in[0,1],$$

و تابع f را عملگر مقعر گویند هرگاه تابع $-f$ عملگر محدب باشد.

توجه: دقت کنید که توابع عملگر صعودی همواره یکنوا هستند، اما برعکس آن لزوماً برقرار نیست. بدین معنی که ممکن است تابعی یکنوا باشد اما عملگر صعودی نباشد. یکی از این توابع تابع $f(t)=t^2$ است. همچنین تابع $f(t)=e^t$ که هم یکنوا است و هم محدب اما نه عملگر صعودی است نه عملگر محدب.

خواص توابع عملگر صعودی:

۱. اگر $f(t)$ عملگر صعودی باشد آنگاه برای $c\geq 0$، $h(t)=f(t)+c$ نیز عملگر صعودی است. این خاصیت برقرار است زیرا $h(A)=f(A)+cI, h(B)=f(B)+cI$ که I عملگر همانی است.

$$A\geq B\Rightarrow f(A)\geq f(B)\Rightarrow f(A)+cI\geq f(B)+cI\Rightarrow h(A)\geq h(B)$$

۲. اگر $f(t)$ عملگر صعودی باشد آنگاه برای $c\geq 0$، $h(t)=f(t)+ct$ نیز عملگر صعودی است. این خاصیت برقرار است زیرا $h(A)=f(A)+cA, h(B)=f(B)+cB$.

۳. اگر $f(t),g(t)$ توابعی عملگر صعودی باشد و $\alpha,\beta\geq 0$ آنگاه $h(t)=\alpha f(t)+\beta g(t)$ نیز عملگر صعودی است. این خاصیت نتیجه می‌دهد که مجموعه توابع عملگر صعودی یک مخروط[۷] در فضای توابع تشکیل می‌دهد.

می‌توان نشان داد که تابع $f(t)=\frac{mt-1}{m+t}$ برای هر $m\geq 0$ نیز عملگر صعودی است. در نتیجه با استفاده از خاصیت آخر می‌توان ترکیب خطی توابع بالا به ازای m-های مختلف را هم در نظر گرفت. نکته‌ی جالب اینکه هر تابع عملگر صعودی، حتما قابل بیان به صورت ترکیب خطی توابع بالا و توابع ثابت و خطی است. البته چون تعداد این توابع بینهایت است بجای ترکیب خطی از انتگرال وزن‌دار در محاسبه ترکیب خطی استفاده می‌شود.

[۵] Operator monotone
[۶] Operator convex
[۷] Cone

عملگر صعودی	عملگر محدب
○ $a+bt, a\in\mathbb{R}, b\geq 0$	○ $a+bt+ct^2, a,b\in\mathbb{R}, c\geq 0$
○ $t^p, p\in[0,1]$	○ $t^p, p\in[1,2]$
○ $-t^p, p\in[-1,0]$	○ $t^p, p\in[-1,0]$
○ $\log t$	○ $-\log t$
○ $t\log t$	○ $\frac{t\log t}{t-1}$
○ $\frac{t}{t+m}, m\geq 0$	○ $\frac{t^2}{t+m}, m\geq,$
○ $\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	○ $\frac{1}{f(t)}$ اگر $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}^+$ عملگر صعودی

جدول ۱: تعدادی از توابع عملگر صعودی و عملگر محدب

قضیه ۵ **(قضیه لونر)**[۸] تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ عملگر صعودی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشند تابع نامنفی $\mu(m)$ و اعداد $d\geq 0$ و $c\in\mathbb{R}$ به طوری که

$$f(t)=c+dt+\int_0^\infty \frac{mt-1}{m+t}\mu(m)dm.$$

مشابها قضیه زیر را در مورد توابع عملگر محدب داریم:

قضیه ۶ تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ عملگر محدب است اگر و تنها اگر وجود داشته باشند تابع نامنفی $\mu(m)$ و اعداد $e\geq 0$ و $c,d\in\mathbb{R}$ به طوری که

$$f(t)=c+dt+et^2+\int_0^\infty \frac{mt^2}{m+t}\mu(m)dm.$$

از روی فُرم انتگرالی توابع عملگر صعودی و عملگر محدب به نظر می‌رسد رابطه‌ای بین این دو نوع تابع وجود دارد.

قضیه ۷ در صورتی که برد تابع f اعداد حقیقی نامنفی باشد ($f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$) تابع f عملگر مقعر است، اگر و تنها اگر عملگر صعودی باشد. یعنی مجموعه توابع عملگر مقعر و صعودی با برد اعداد حقیقی نامنفی یکسان هستند.

بصورت خاص تابع $f(t)=-\ln(t)$ و $f(t)=t\ln(t)$ توابعی عملگر محدب هستند که این تابع آخر در نظریه اطلاعات کوانتمی کاربرد زیادی دارد. در جدول ۱ تعدادی از توابع عملگر صعودی و عملگر محدب لیست شده‌اند.

[۸] Löwner’s theorem