مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری نویسنده: الینکا بدرویا

جلسه ۱۷

در این جلسه دینامیک سیستم‌های کوانتمی را بررسی می‌کنیم. طبق اصول مکانیک کوانتمی دینامیک یک سیستم «بسته» به وسیله‌ی عملگرهای یکانی مشخص می‌شود:

$$\rho \mapsto U\rho U^\dagger$$

حال سؤال این است که اگر سیستم بسته نباشد چه. نکته‌ی دیگر این است که تغییری که اندازه‌گیری روی یک سیستم کوانتمی القاء می‌کند را نیز می‌توان به عنوان یک دینامیک کوانتمی در نظر گرفت. همچنین ممکن است یک دینامیک کوانتمی از ترکیب تحول یکانی و اندازه‌گیری به وجود بیاید. در اینجا ابتدا دو مثال مهم از دینامیک‌های کوانتمی را بررسی می‌کنیم و بعد این مسأله را در حالت کلی در نظر می‌گیریم.

۱ برهم کنش با محیط

فرض کنید که سیستم کوانتمی S با محیط اطرافش، که آن را با E نشان می‌دهیم، بر هم کنش داشته باشد. توجه کنید که S با محیط اطرافش یک سیستم ترکیبی «بسته» تشکیل می‌دهد، پس تحول زمانی SE یک تحول یکانی U_{SE} است. از طرف دیگر از آنجا که بعد از برهم کنش فقط به حالت سیستم S علاقه‌مندیم، باید E را از رابطه‌ی بدست آمده اثر جزیی بگیریم. حال فرض کنید حالت هر یک از سیستم‌های S, E قبل از برهم‌کنش τ_E و ρ_S باشد. در نتیجه بعد از برهم‌کنش حالت سیستم S برابر است با $\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}(\rho_S\otimes\tau_E)U_{SE}^\dagger\right)$. بنابراین می‌توانیم نگاشت

$$\begin{aligned}&\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)\\ &\Phi(\rho_S) = \mathrm{tr}_E\left(U_{SE}(\rho_S\otimes\tau_E)U_{SE}^\dagger\right),\end{aligned} \tag{۱}$$

را به عنوان دینامیک برهم‌کنش با محیط اطراف تعریف کنیم.

۲ اندازه‌گیری به عنوان یک دینامیک

فرض کنید سیستم S را که در حالت ρ_S قرار دارد با عملگرهای $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ اندازه‌گیری کنیم. طبق شرط کامل بودن داریم $\sum_i M_i^\dagger M_i = I_S$. می‌دانیم حاصل اندازه‌گیری با احتمال $p_i = \mathrm{tr}(M_i\rho M_i^\dagger)$ برابر i است و در این صورت حالت سیستم به

$$\sigma_i = \frac{1}{p_i}M_i\rho M_i^\dagger$$

تغییر پیدا می‌کند. یعنی پس از اندازه‌گیری هنگرد $\{p_i, \sigma_i\}$ را خواهیم داشت. طبق تعریف ماتریس چگالی متناظر با این هنگرد برابر است با

$$\sum_i p_i \sigma_i = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger.$$

در واقع اگر حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری را با $\Phi(\rho)$ نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{k} M_i \rho M_i^\dagger. \tag{۲}$$

توجه کنید که در اینجا ما فرض کردیم حاصل اندازه‌گیری از ما پوشیده است. زیرا اگر بدانیم حاصل اندازه‌گیری j است، حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری $\sigma_j = M_j \rho M_j^\dagger / p_j$ خواهد بود. ولی اگر حاصل اندازه‌گیری را ندانیم و فقط بدانیم که اندازه‌گیری انجام شده است، هنگرد $\{p_i; \sigma_i\}$ را به دست می‌آوریم که متناظر با $\Phi(\rho)$ است.

نکته‌ی دیگر این که با این دید اثر جزیی نیز متناظر با اندازه‌گیری در یک پایه است. فرض کنید که حالت ترکیبی ρ_{AB} را با عملگرهای $\{M_i = I_A \otimes \langle i|_B\}$ که در آن $\{|i\rangle_B\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_B$ است اندازه بگیریم. در این صورت داریم

$$\Phi(\rho_{AB}) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger = \sum_i (I_A \otimes \langle i|_B) \rho_{AB} (I_A \otimes |i\rangle_B) = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}).$$

۳ دینامیک اندازه‌گیری و برهم‌کنش با محیط معادلند

در این بخش نشان می‌دهیم که دو دینامیک (۱) و (۲) که به ترتیب متناظر با برهم‌کنش با محیط اطراف و اندازه‌گیری هستند با هم معادلند. به این معنی که (۱) را می‌توان به صورت (۲) بازنویسی کرد و بالعکس.

برای شروع فرض کنید Φ با رابطه‌ی (۱) داده شده باشد. می‌خواهیم فرم دیگری برای Φ به دست بیاوریم. برای سادگی فرض می‌کنیم $\tau_E = |v\rangle\langle v|_E$ محض باشد. همچنین $\{|e_0\rangle_E, \ldots, |e_{d'-1}\rangle_E\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_E$ بگیرید. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho_S) &= \mathrm{tr}_E \left(U_{SE} (\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_E) U_{SE}^\dagger \right) \\
&= \sum_{i=0}^{d'-1} (I_S \otimes \langle e_i|_E) \left(U_{SE} (\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_E) U_{SE}^\dagger \right) (I_S \otimes |e_i\rangle_E) \\
&= \sum_{i=0}^{d'-1} (I_S \otimes \langle e_i|_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \rho_S (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes |e_i\rangle_E).
\end{aligned}$$

حال برای هر $0 \leq i \leq d' - 1$ تعریف کنید

$$M_i = (I_S \otimes \langle e_i|_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E).$$

داریم $M_i^\dagger = (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes |e_i\rangle_E)$ و در نتیجه

$$\Phi(\rho_S) = \sum_{i=0}^{d'-1} M_i \rho_S M_i^\dagger. \tag{۳}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d'-1} M_i^\dagger M_i &= \sum_{i=0}^{d'-1} (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes |e_i\rangle_E)(I_S \otimes \langle e_i|_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger \left(\sum_{i=0}^{d'-1} I_S \otimes |e_i\rangle\langle e_i|_E \right) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E) U_{SE}^\dagger (I_S \otimes I_E) U_{SE} (I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= (I_S \otimes \langle v|_E)(I_S \otimes |v\rangle_E) \\
&= \langle v|v\rangle I_S \\
&= I_S.
\end{aligned}$$

بنابراین Φ که بر اساس یک برهم‌کنش با محیط اطراف نوشته شده بود، متناظر با اندازه‌گیری $\{M_i\}$ نیز هست. به فرم (۱) برای Φ در اصطلاح Stinespring dilation گفته می‌شود و به عملگرهای M_i، Kraus operators .

توجه کنید که در این اثبات ما فرض کرده بودیم که τ_E محض است و رابطه‌ی (۳) را به دست آوردیم. ولی توجه کنید که اگر τ_E محض نباشد می توان آن را به صورت ترکیب خطی محدب حالتهای محض نوشت و در نتیجه کافی است نشان دهیم ترکیب خطی محدب دینامیک‌هایی به فرم (۲) باز این فرم را دارند. اثبات دیگر این که کافی است یک محض‌سازی از τ_E مانند $|v\rangle_{EE'}$ در نظر گرفته و بجای U_{SE} از $V_{SEE'} = U_{SE} \otimes I_{E'}$ استفاده کرده و از رابطه‌ی

$$\mathrm{tr}_E \left(U_{SE} (\rho_S \otimes \tau_E) U_{SE}^\dagger \right) = \mathrm{tr}_{EE'} \left(V_{SEE'} (\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_{EE'}) V_{SEE'}^\dagger \right),$$

فرم دیگری برای Φ بیابیم.

نکته ۱ اشاره شد که اثر جزیی گرفتن را می‌توان به عنوان اندازه‌گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه در نظر گرفت. بنابراین اثبات بالا نشان می‌دهد که برهم‌کنش (یکانی) یک سیستم با محیط اطراف و سپس اندازه‌گیری محیط اطراف در پایه متعامد یکه (اثر جزیی گرفتن)، یک اندازه‌گیری (نابدیهی) روی سیستم اصلی بدست می دهد.

حال عکس مطلب فوق را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که Φ به صورت (۲) داده شده باشد. نشان می‌دهیم می‌توان آن را به صورت (۱) نوشت.

$\mathcal{H}_E$ را یک فضای هیلبرت با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle\}$ بگیرید و قرار دهید $|v\rangle = |e_1\rangle \in \mathcal{H}_E$. تعریف کنید $U_{SE} : \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$

$$U_{SE} \left(|\psi\rangle_S |e_1\rangle_E \right) = \sum_{i=1}^{k} M_i |\psi\rangle |e_i\rangle. \tag{۴}$$

تا اینجا U_{SE} روی $\mathcal{H}_S \otimes \{|e_1\rangle_E\} \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ تعریف شده است. توجه کنید که U_{SE} روی این زیرفضا حافظ ضرب داخلی است:

$$\begin{aligned}
\left(U_{SE}\left(|\psi\rangle_S|e_1\rangle_E\right), U_{SE}\left(|\phi\rangle_S|e_1\rangle_E\right)\right) &= \left(\sum_i M_i|\psi\rangle|e_i\rangle, \sum_j M_j|\phi\rangle|e_j\rangle\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \langle\psi|M_i^\dagger M_j|\phi\rangle\langle e_i|e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k}\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|\sum_{i=1}^{k} M_i^\dagger M_i|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|\phi\rangle.
\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم که U_{SE} را می‌توان به یک عملگر یکانی روی کل $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ گسترش داد. اگر $\{|0\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_S$ بگیریم، محاسبات بالا نشان می‌دهند که $\{U_{SE}|i\rangle_S|e_1\rangle : \ i = 0, \dots, d-1\}$ متعامد یکه است. پس این مجموعه را می‌توان به یک «پایه‌ی» متعامد یکه برای $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ با dk عضو گسترش داد

$$\{|f_{ij}\rangle : \ 0 \le i \le d-1, 1 \le j \le k\}$$

که در آن $|f_{i1}\rangle = U_{SE}|i\rangle_S|e_1\rangle$. حال کافی است قرار دهیم $U_{SE}|i\rangle_S|e_j\rangle = |f_{ij}\rangle$. در این صورت U_{SE} یک پایه‌ی متعامد یکه را به یک پایه‌ی متعامد یکه می‌برد و لذا یکانی است. همچنین به وضوح (۴) برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_E\left(U_{SE}\left(|\psi\rangle\langle\psi|_S \otimes |e_1\rangle\langle e_1|_E\right)U_{SE}^\dagger\right) &= \mathrm{tr}_E\left((U_{SE}|\psi\rangle|e_1\rangle)(U_{SE}|\psi\rangle|e_1\rangle)^\dagger\right) \\
&= \mathrm{tr}_E\left((\sum_{i=1}^{k} M_i|\psi\rangle|e_i\rangle)(\sum_{j=1}^{k}\langle\psi|M_j^\dagger\langle e_j|)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{tr}_E\left((M_i|\psi\rangle|e_i\rangle)\left(\langle\psi|M_j^\dagger\langle e_j|\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{tr}_E\left(M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_j^\dagger \otimes |e_i\rangle\langle e_j|\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_j^\dagger\left(\mathrm{tr}|e_i\rangle\langle e_j|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} M_i|\psi\rangle\langle\psi|M_i^\dagger \\
&= \Phi(|\psi\rangle\langle\psi|).
\end{aligned}$$

با توجه به خطی بودن برای هر ماتریس چگالی ρ نیز خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{k} M_i \rho_S M_i^\dagger = \mathrm{tr}_E \left(U_{SE} \left(\rho_S \otimes |v\rangle\langle v|_E \right) U_{SE}^\dagger \right).$$

نکته ۲ دوباره تاکید می‌کنیم که معادل بودن (۱) و (۲) نشان می‌دهد که یک اندازه‌گیری دلخواه را می‌توان به عنوان یک برهم‌کنش با محیط اطراف و سپس اندازه‌گیری محیط در یک پایه‌ی متعامد دلخواه در نظر گرفت. نتیجه این که اگر در آزمایشگاه بتوانیم تحول‌های زمانی را شبیه‌سازی کنیم و همچنین بتوانیم اندازه‌گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه را انجام دهیم، آنگاه با ترکیب آنها می‌توانیم هر اندازه‌گیری دلخواهی را انجام دهیم.

نکته ۳ در اثبات فوق می‌بینیم که اثر U_{SE} تنها روی زیرفضای $\mathcal{H}_S \otimes \{|v\rangle_E\} \subseteq \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ برای ما مهم است و U_{SE} را به طور دلخواه به کل فضا گسترش دادیم. از طرف دیگر $\mathcal{H}_S \otimes \{|v\rangle_E\}$ یکریخت با $\mathcal{H}_S$ است. پس می‌توان نگاشت خطی $V : \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ را به صورت

$$V|\psi\rangle = U|\psi\rangle|v\rangle$$

تعریف کرد. در این صورت V یک ایزومتری است که فضای $\mathcal{H}_S$ را به فضای $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ می‌نگارد. (برای مشخص شدن این فضاها گاهی از نمادگذاری $V_{S\to SE}$ استفاده می‌شود. حال داریم

$$\Phi(\rho) = tr_E \left(V \rho V^\dagger \right)$$

که فرم خلاصه شده‌ای از (۱) است.

۴ نگاشت‌های کاملاً مثبت و حافظ اثر

تا اینجا دیدیم که نگاشت‌های متناظر با برهم‌کنش با محیط و اندازه‌گیری یکسان هستند. سوالی که پیش می‌آید این است که دینامیکی که مثلا از ترکیب یک اندازه‌گیری و سپس تحول زمانی بدست می‌آید چه فرمی دارد. در این بخش نگاشت‌های کوانتمی را در حالت کلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید

$$\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S),$$

یک دینامیک کوانتمی دلخواه باشد. با توجه به اصول مکانیک کوانتمی انتظار داریم

- Φ خطی باشد
- Φ باید حالات کوانتمی را به حالات کوانتمی بنگارد. مثلا برای هر ماتریس چگالی ρ، $\Phi(\rho)$ نیز باید ماتریس چگالی باشد.

برای برقرار شدن شرط دوم Φ باید حافظ اثر [۱] باشد یعنی برای هر X باید داشته باشیم $\mathrm{tr}(\Phi(X)) = \mathrm{tr}X$. در این داریم $\mathrm{tr}(\Phi(\rho)) = \mathrm{tr}\rho = 1$. نکته‌ی دیگر این که $\Phi(\rho)$ باید مثبت نیمه معین باشد.

[۱] Trace preserving

تعریف ۴ نگاشت خطی $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ را «مثبت[۲]» گوییم اگر برای هر $X \geq 0$ داشته باشیم $\Phi(X) \geq 0$.

شرط مثبت بودن به تنهایی برای مشخص کردن دینامیک‌های کوانتمی کافی نیست. فرض کنید یک سیستم ترکیبی SE در حالت ρ_{SE} داشته باشیم و دینامیک Φ را روی زیرسیستم S اعمال کنیم. حاصل $\Phi \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE})$ خواهد شد. پس $\Phi \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE})$ نیز باید یک ماتریس چگالی باشد. به راحتی قابل بررسی است که اگر Φ حافظ اثر باشد، آنگاه $\Phi \otimes \mathcal{I}_E$ نیز حافظ اثر است. ولی مثال‌هایی وجود دارد که Φ مثبت است ولی $\Phi \otimes \mathcal{I}$ مثبت نیست. یعنی ممکن است Φ هر ماتریس مثبت نیمه معین را به یک ماتریس مثبت نیمه معین بنگارد ولی $\Phi \otimes \mathcal{I}$ این خاصیت را نداشته باشد.

برای مثال فرض کنید Φ نگاشت ترانهاده گرفتن باشد: $\Phi(X) = X^T$. اگر X مثبت نیمه معین باشد، X^T نیز مثبت نیمه معین است. پس نگاشت Φ مثبت است. حال قرار دهید $\rho_{SE} = |v\rangle\langle v|_{SE}$ که در آن $|v\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. در این صورت

$$\rho_{SE} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

می‌بینیم که $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(\rho_{SE})$ یک مقدار ویژه‌ی $-1/2$ دارد، پس مثبت نیمه معین نیست. بنابراین $\Phi(X) = X^T$ با این که مثبت است نمی‌تواند نگاشت کوانتومی باشد.

تعریف ۵ نگاشت خطی $\Phi_S : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ را «کاملاً مثبت[۳]» گوییم اگر برای هر فضای هیلبرت $\mathcal{H}_E$، $\Phi_S \otimes \mathcal{I}_E$ مثبت باشد.

قضیه‌ی زیر دینامیک‌های کوانتمی را در کلی‌ترین شکل آنها مشخص می‌کند.

قضیه ۶ برای هر نگاشت خطی کاملاً مثبت $\Phi : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ عملگرهای $M_i \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ وجود دارند به طوری که

$$\Phi(X) = \sum_i M_i X M_i^\dagger.$$

همچنین اگر Φ حافظ اثر باشد آنگاه $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$.

اثبات: $\{|0\rangle_S, \dots, |d-1\rangle_S\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_S$ بگیرید و $\mathcal{H}_E$ را یک فضای هیلبرت یکریخت با $\mathcal{H}_S$ قرار دهید. تعریف کنید

$$|\alpha\rangle_{SE} = \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_S |i\rangle_E,$$

و

$$\sigma_{SE} = \Phi_S \otimes \mathcal{I}_E(|\alpha\rangle\langle\alpha|_{SE}) = \sum_{i,j=0}^{d-1} \Phi_S(|i\rangle\langle j|)_S \otimes |i\rangle\langle j|_E.$$

---

[۲] Positive

[۳] Completely positive

$|\alpha\rangle\langle\alpha|$ مثبت نیمه معین است. پس به دلیل شرط کاملا مثبت بودن Φ_S، σ_{SE} هم مثبت نیمه معین خواهد بود.

حال برای $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} x_i|i\rangle$ تعریف کنید $|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} x_i^*|i\rangle$. داریم

$$\begin{aligned}
(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)\sigma_{SE}(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) &= \sum_{i,j=0}^{d-1} (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)\,(\Phi_S(|i\rangle\langle i|)_S \otimes |i\rangle\langle j|_E)\,(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1} \Phi_S(|i\rangle\langle j|)\langle\tilde{\psi}|i\rangle\langle j|\tilde{\psi}\rangle \\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1} x_i x_j^* \Phi_S(|i\rangle\langle j|) \\
&= \Phi_S\left(\sum_{i,j=0}^{d-1} x_i x_j^* |i\rangle\langle j|\right) \\
&= \Phi_S(|\psi\rangle\langle\psi|).
\end{aligned}$$

σ_{SE} مثبت نیمه معین است. لذا پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|\beta_k\rangle_{SE}\}$ و اعداد $\lambda_k \geq 0$ وجود دارند به طوری که

$$\sigma_{SE} = \sum_k \lambda_k |\beta_k\rangle\langle\beta_k|.$$

حال برای هر k تعریف کنید $M_k : \mathcal{H}_S \to \mathcal{H}_S$

$$M_k|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_k}(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle = \sqrt{\lambda_k}\sum_{i=0}^{d-1} x_i (I_S \otimes \langle i|_E)|\beta_k\rangle.$$

توجه کنید که M_k- ها عملگرهایی خطی هستند. داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|) &= (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)\sigma_{SE}(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_k \lambda_k (I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle\langle\beta_k|(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E) \\
&= \sum_k \left[\sqrt{\lambda_k}(I_S \otimes \langle\tilde{\psi}|_E)|\beta_k\rangle\right]\left[\sqrt{\lambda_k}\langle\beta_k|(I_S \otimes |\tilde{\psi}\rangle_E)\right] \\
&= \sum_k M_k|\psi\rangle\langle\psi|M_k^\dagger.
\end{aligned}$$

با توجه به خطی بودن Φ، رابطه‌ی $\Phi(\rho) = \sum_k M_k\rho M_k^\dagger$ نه فقط برای حالات محض بلکه برای هر ماتریس چگالی برقرار است. پس قسمت اول قضیه ثابت شد.

حال فرض کنید Φ حافظ اثر باشد. یعنی برای هر X داریم

$$\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}\Phi(X) = \sum_k \mathrm{tr}(M_k X M_k^\dagger) = \sum_k \mathrm{tr}(M_k^\dagger M_k X).$$

پس $\mathrm{tr}((I - \sum_k M_k^\dagger M_k)X) = 0$ برای هر X. در نتیجه $I = \sum_k M_k^\dagger M_k$. در اینجا از این خاصیت استفاده که اگر $\mathrm{tr}(XA) = 0$ برای هر X آنگاه $A = 0$. $\square$

نکته ۷ نمایش یک نگاشت کاملاً مثبت که حافظ اثر است[۴] به صورت $\Phi(X) = \sum_k M_k X M_k^\dagger$ یکتا نیست. قضیه‌ی 8.2 کتاب مرجع این نکته را بررسی می‌کند.

نکته ۸ در اثبات می‌بینیم که تعداد M_i-ها برابر رتبه‌ی σ_{SE} است.

نکته ۹ از این قضیه و مطالب قبل نتیجه می‌شود که هر نگاشت کاملا مثبت و حافظ اثر را می‌توان به صورت

$$\Phi(X_S) = tr_E\left(V\rho_S V^\dagger\right)$$

نوشت که در آن $V_{S\to SE}$ یک ایزومتری است.

[۴] Completely positive trace-preserving