مدرس: دکتر ابوالفتح بیگی ودکتر امین زاده گوهری نویسنده: محمدرضا صنم زاده

جلسه ۱۵

فرض کنیم ماتریس چگالی سیستم ترکیبی شامل زیر سیستم هایB و A را داشته باشیم. اگر حالت سیستم ترکیبی، جدایی‌پذیر باشد، یعنی:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B, \qquad |\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A, \quad |\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$$

آن گاه می توان گفت که سیستم A در حالت$|\psi\rangle_A$ و سیستم B در حالت$|\psi\rangle_B$ قرار دارد. اما اگر زیرسیستم‌ها درهم تنیده باشند، یعنی $|\psi\rangle_{AB}$ را نتوان جدا کرد، حالت سیستم های A و B به تنهایی چگونه توصیف می شود؟ در حالت کلی اگر سیستم مرکب با ماتریس چگالی ρ_{AB} توصیف شود، سیستم های A و B چگونه توصیف می شود؟ در جلسه قبل این سؤال‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. در این جلسه بحث را کامل می‌کنیم.

۱ اثر و اثر جزئی

تعریف اثر به عنوان یک اپراتور به صورت زیر است:

$$\mathrm{tr} : \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathbb{C}$$

که به هر ماتریس چگالی، یک عضو از میدان اعداد مختلط نسبت می‌دهد. فرض کنید $\{|0\rangle_A, \ldots, |d-1\rangle_A\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}_A$ باشد. نگاشت اثر جزئی[۱] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{tr}_A : \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_B)$$
$$\mathrm{tr}_A(\rho_{AB}) = \sum_{i=0}^{d-1} \left(\langle i|_A \otimes I_B\right) \rho_{AB} \left(|i\rangle_A \otimes I_B\right).$$

البته تعریف اثر جزئی به پایه انتخاب شده ربطی ندارد (مستقل از این که چه پایه‌ای انتخاب کنیم به عملگر یکسانی می‌رسیم). یک راه مشاهده این موضوع این است که توجه کنیم که اثر جزئی را معادلا می‌توان بصورت ضرب تانسوری دو عملگر نوشت: یک عملگر اثر (روی فضایی که می‌خواهیم آن را حذف کنیم) و یک عملگر همانی

$$\mathrm{tr}_A = \mathrm{tr} \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)} : \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) \to \mathbb{C} \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) = \mathbf{L}(\mathcal{H}_B)$$

و

$$\mathrm{tr}_B = \mathcal{I}_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)} \otimes \mathrm{tr} : \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbb{C} = \mathbf{L}(\mathcal{H}_A).$$

[۱] Partial trace

۱.۱ الحاقی اثر جزئی

اگر یک عملگر خطی به همراه یک ضرب داخلی داشته باشیم، می توان از روی آن الحاقی را تعریف کرد. برای فضای خطی عملگرها، ضرب داخلی دو عملگر A, B را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^\dagger B).$$

الحاقی عملگر اثر، عملگری خواهد بود با دامنه و برد زیر:

$$\mathrm{tr}^\dagger : \mathbb{C} \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_A).$$

نشان می‌دهیم که این الحاقی برابر است با

$$\mathrm{tr}^\dagger(\alpha) = \alpha I.$$

اگر $\mathrm{tr}^\dagger$ الحاقی tr باشد، باید داشته باشیم:

$$\forall\ M \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_A)\ , \alpha \in \mathbb{C} \qquad (\alpha\ , \mathrm{tr}(M))_{\mathbb{C}}\ = (\mathrm{tr}^\dagger(\alpha), M)_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)}$$

ضرب داخلی سمت چپ ضرب معمولی اعداد مختلط است. پس

$$(\alpha, \mathrm{tr}(M))_{\mathbb{C}} = \alpha^* \mathrm{tr}(M)$$

از طرف دیگر

$$\alpha^* \mathrm{tr}(M) = (\alpha I, M)_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)}.$$

در نتیجه

$$(\alpha I, M)_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)} = (\mathrm{tr}^\dagger(\alpha), M)_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)}$$

و

$$\mathrm{tr}^\dagger(\alpha) = \alpha I.$$

الحاقی اثر جزئی را نیز می‌توان یافت. توجه کنید که

$$\mathrm{tr}_A^\dagger : \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) = \mathbb{C} \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B),$$

و داریم $\mathrm{tr}_A = \mathrm{tr} \otimes \mathcal{I}$ در نتیجه

$$\mathrm{tr}_A^\dagger = (\mathrm{tr}\ \otimes\ \mathcal{I})^\dagger = (\mathrm{tr}^\dagger \otimes\ \mathcal{I}).$$

بنابراین برای هر حالت ρ_B داریم:

$$\mathrm{tr}_A^\dagger(\rho_B) = \mathrm{tr}_A^\dagger(1 \otimes \rho_B) = \mathrm{tr}^\dagger(1) \otimes \mathcal{I}(\rho_B) = I_A \otimes \rho_B.$$

۲.۱ خواص اثر جزئی

نکته‌ی مهمی که در مورد اثر جزئی وجود دارد این است که ترکیب دو اثر جزئی، معادل اثر جزئی نسبت به ترکیب آنهاست. یعنی

$$\mathrm{tr}_B(\mathrm{tr}_C(\rho_{ABC})) = \mathrm{tr}_C(\mathrm{tr}_B(\rho_{ABC})) = \mathrm{tr}_{BC}(\rho_{ABC}).$$

به همین دلیل نمادگذاری‌های ρ_A, ρ_{AB} و مانند آن خوش‌تعریف هستند.

همچنین اثر جزئی خاصیت دوری بودن اثر را بصورت جزئی به ارث می‌برد. برای هر عملگر دلخواه N_{AB} روی فضای تانسوری $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ و هر عملگر M_B روی فضای $\mathcal{H}_B$ داریم:

$$\mathrm{tr}_B\left(N\left(I_A \otimes M\right)\right) = \mathrm{tr}_B\left(\left(I_A \otimes M\right)N\right)$$

جهت اثبات ابتدا فرض کنید که N_{AB} به شکل $N_A \otimes N_B$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\left(\left(N_A \otimes N_B\right)\left(I \otimes M\right)\right) &= \mathrm{tr}_B\left(N_A \otimes N_B M\right) \\
&= (I \otimes \mathrm{tr})(N_A \otimes (N_B M)) \\
&= N_A \otimes \mathrm{tr}(N_B M) \\
&= N_A \otimes \mathrm{tr}(M N_B) \\
&= (I \otimes \mathrm{tr})(N_A \otimes (M N_B)) \\
&= \mathrm{tr}_B((I \otimes M)(N_A \otimes N_B)).
\end{aligned}$$

حال از آن جایی که هر عملگر دلخواه N_{AB} را می‌توان به صورت ترکیب خطی عملگرهای به شکل $N_A \otimes N_B$ نوشت، رابطه‌ی مطلوب ما با توجه به خطی بودن باید برای هر N_{AB} دلخواه درست باشد.

از نتایج رابطه‌ی فوق مثلا این است که

$$\mathrm{tr}_B\left(\left(A \otimes B\right)\rho\left(C \otimes D\right)\right) = \mathrm{tr}_B\left(\left(A \otimes DB\right)\rho\left(C \otimes I\right)\right).$$

۳.۱ اندازه‌گیری و اثر جزئی

فرض کنید می‌خواهیم سیستم A را اندازه‌گیری کنیم. در این صورت اگر عملگر POVM مربوط به سیستم A برابر E_A باشد، عملگر اندازه‌گیری روی سیستم ترکیبی $E_A \otimes I_B$ خواهد بود و روی ماتریس چگالی سیستم مرکب اثر می کند. خاصیت مهم اثر جزئی این است که می توان اندازه‌گیری $E_A \otimes I_B$ را روی سیستم ترکیبی اعمال کرد و بعد سیستم B را دور انداخت (نسبت به B اثر جزئی گرفت). یا اینکه از ابتدا B را دور انداخته و اندازه‌گیری را فقط روی A انجام داد. یعنی

$$\mathrm{tr}(E_A \rho_A) = \mathrm{tr}(E_A \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})) = \mathrm{tr}((E_A \otimes I)\rho_{AB})$$

برای اثبات این تساوی توجه کنید که

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(E_A(\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}))) &= ({E_A}^\dagger, \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}))\\ &= ({E_A}^\dagger, (I_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)} \otimes \mathrm{tr}_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)})\rho_{AB})\\ &= ((I_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)} \otimes \mathrm{tr}_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)})^\dagger\ {E_A}^\dagger, \rho_{AB})\end{aligned}$$

عملگر ${E_A}^\dagger$ را می توان به صورت ضرب تانسوری نوشت: ${E_A}^\dagger = {E_A}^\dagger \otimes 1$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(E_A\rho_A) &= \big((I \otimes \mathrm{tr}_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)})^\dagger({E_A}^\dagger \otimes 1), \rho_{AB}\big)\\ &= ({E_A}^\dagger \otimes \mathrm{tr}^\dagger(1), \rho_{AB})\\ &= ({E_A}^\dagger \otimes I, \rho_{AB})\\ &= \mathrm{tr}((E_A \otimes I)\rho_{AB}).\end{aligned}$$

۴.۱ تحول زمانی و اثر جزئی

اینکه تحول زمانی روی سیستم ترکیبی انجام شود سپس سیستم B دور انداخته شود، همانند این است که از ابتدا سیستم B را دور بیندازیم و تحول زمانی را روی سیستم A اعمال کنیم. یعنی

$$U\rho_A U^\dagger = \mathrm{tr}_B[(U \otimes I)\rho_{AB}(U^\dagger \otimes I)]$$

اثبات: برای سادگی نگاشت Φ_U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi_U : \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \to \mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$$

$$\Phi_U(X) = UXU^\dagger.$$

در این صورت داریم

$$\mathrm{tr}_B[(U \otimes I)\rho_{AB}(U^\dagger \otimes I)] = (I \otimes \mathrm{tr})(\Phi_U \otimes I)\rho_{AB}$$

اما $\Phi_U \otimes I$ و $I \otimes \mathrm{tr}$ جابجا می شوند، پس:

$$\mathrm{tr}_B[(U \otimes I)\rho_{AB}(U^\dagger \otimes I)] = (\Phi_U \otimes I)(I \otimes \mathrm{tr})\rho_{AB} = (\Phi_U \otimes I)(\rho_A \otimes 1) = U\rho_A U^\dagger \otimes 1 = U\rho_A U^\dagger.$$

□

تمرین ۱ نشان دهید

$$tr_B[(I \otimes U)\rho_{AB}(I \otimes U^\dagger)] = tr_B(\rho_{AB}) = \rho_A.$$

۵.۱ اثر جزئی و هنگردها

فرض کنید هنگرد $\{p_i, \rho_i^{AB}\}$ را روی یک سیستم ترکیبی داریم. اگر روی سیستم مرکب نسبت به B اثر جزئی بگیریم، هنگردی چون $\{p_i, \rho_i^{A}\}$ ایجاد می شود. به هر کدام از هنگردها می‌توان یک ماتریس چگالی نسبت داد:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^{AB}, \qquad \tau_A = \sum_i p_i \rho_i^{A}.$$

برای نشان دادن سازگاری اثر جزئی با هنگردها باید ثابت کنیم که با گرفتن اثر جزئی از ماتریس چگالی ρ_{AB} به τ_A می‌رسیم. با استفاده از خطی بودن tr_B داریم:

$$\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \mathrm{tr}_B(\sum_i p_i \rho_i^{AB}) = \sum_i p_i \mathrm{tr}_B(\rho_i^{AB}) = \sum_i p_i \rho_i^{A} = \tau_A$$

نکته ۱ اثر جزئی در حالت کلی تحت جایگشت عملگرها ناوردا نیست: $tr_B(\sigma\rho) \neq tr_B(\rho\sigma)$.

تمرین ۲ نشان دهید

$$tr_B[(X_A \otimes X_B)(X'_A \otimes X'_B)] = tr_B[(X_A \otimes X'_B)(X'_A \otimes X_B)].$$

۲ نحوه‌ی محاسبه‌ی اثر جزئی

فرض کنید که $|i\rangle$ و $|j\rangle$ دو بردار یکسان یا عمود بر هم در فضای $\mathcal{V}$ باشند و $|k\rangle$ و $|l\rangle$ دو بردار یکسان یا عمود بر هم در فضای $\mathcal{W}$ باشند. در این صورت با استفاده از تعریف اثر جزئی داریم:

$$\mathrm{tr}_B(|i\rangle\langle j|_A \otimes |k\rangle\langle l|_B) = \mathcal{I} \otimes \mathrm{tr}(|i\rangle\langle j|_A \otimes |k\rangle\langle l|_B) = \delta_{kl}|i\rangle\langle j|_A.$$

در حالت کلی‌تر $\mathrm{tr}_A(X_A \otimes Y_B) = \mathrm{tr}(X_A)Y_B$.

از طرف دیگر هر عملگر خطی روی $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ را می توان به صورت ترکیب خطی از عملگرهای به فرم $|i\rangle\langle j|_A\otimes|k\rangle\langle l|_B$ نوشت. بنابراین با توجه به خطی بودن اثر جزئی می‌توان اثر جزئی هر عملگر روی فضای تانسوری را حساب کرد.

محاسبه از روی نمایش ماتریسی:

فرض کنید نمایش ماتریسی یک عملگر در دست است و می‌خواهیم اثر جزئی آن را حساب کنیم.

$$M_{AB} \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbf{L}(\mathcal{H}_B) \qquad \dim(\mathcal{H}_A) = d \quad , \dim(\mathcal{H}_B) = d'.$$

در این صورت نمایش ماتریسی M_{AB} با سایز $dd' \times dd'$ خواهد بود و به صورت بلوکی به فرم زیر است:

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1d} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{d1} & S_{d2} & \dots & S_{dd} \end{pmatrix}.$$

که در آن S_{ij} ماتریسی $d' \times d'$ است. اثر جزئی گرفتن نسبت به B معادل است با آنکه به جای هر بلوک ماتریس M_{AB} اثرش را قرار دهیم.

$$\mathrm{tr}_B(M_{AB}) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(S_{11}) & \mathrm{tr}(S_{12}) & \dots & \mathrm{tr}(S_{1d}) \\ \mathrm{tr}(S_{21}) & \mathrm{tr}(S_{22}) & \dots & \mathrm{tr}(S_{2d}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{tr}(S_{d1}) & \mathrm{tr}(S_{d2}) & \dots & \mathrm{tr}(S_{dd}) \end{pmatrix}.$$

همچنین اثر جزئی نسبت به A به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{tr}_A(M_{AB}) = S_{11} + S_{22} + \cdots + S_{dd}.$$

حالت خاص: فرض کنید ρ_{AB} خالص باشد

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|_{AB}, \qquad |\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

در این صورت می‌توان تجزیه‌ی اشمیت $|\psi\rangle_{AB}$ را در نظر گرفت:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle_A |w_i\rangle_B$$

که $\{|v_i\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathcal{H}_A$ و $\{|w_i\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathcal{H}_B$ و λ_i-ها اعداد حقیقی نامنفی هستند.

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j^* |v_i\rangle\langle v_j|_A \otimes |w_i\rangle\langle w_j|_B$$

در نتیجه

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})) = \sum_i \lambda_i^2 |v_i\rangle\langle v_j|_A, \qquad \rho_B = \mathrm{tr}_A(\rho_{AB})) = \sum_i \lambda_i^2 |w_i\rangle\langle w_j|_B$$

بسط‌های بالا در واقع تجزیه‌های طیفی عملگرهای ρ_A و ρ_B هستند. نتیجه این که مقادیر ویژه‌ی ρ_A و ρ_B یکسان‌اند. این نکته برای هر حالت خالص ρ_{AB} برقرار است.

۳ سیستم‌های کلاسیک

فرض کنید متغیر تصادفی X با مقادیر $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ و توزیع احتمال p_i داده شده است. $X = i$ را می‌توانیم متناظر با بردار $|i\rangle$ بگیریم. پس این متغیر تصادفی متناظر با یک هنگرد است: با احتمال p_i سیستم در حالت $|i\rangle$ است. در نتیجه به متغیر تصادفی می‌توان یک ماتریس چگالی نسبت داد:

$$\rho_X = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|.$$

ρ_X ماتریسی است که روی قطر اصلی آن ،مقادیر احتمال قرار دارند. ρ_X ماتریس چگالی است چون قطری است و مقادیر روی قطر آن همگی نامنفی هستند و همچنین جمع مقادیر روی قطر آن که همان اثر ماتریس است برابر 1 است.

به طور مشابه دو متغیر تصادفی X, Y را می‌توان به صورت یک هنگرد دید که با احتمال $p(x,y)$ حالت $|x\rangle \otimes |y\rangle$ را می‌گیرد. در نتیجه ماتریس چگالی مربوط به آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_{XY} = \sum_{x,y} p(x,y)|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y| = \sum_{x,y} p(x,y)|xy\rangle\langle xy|$$

حال برای محاسبه‌ی توزیع‌های حاشیه‌ای کافی است اثر جزئی بگیریم:

$$\rho_X = \mathrm{tr}_Y(\rho_{XY}) = \mathrm{tr}_Y\big(\sum_{x,y} p(x,y)|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y|\big) = \sum_{x,y} p(x,y)|x\rangle\langle x| = \sum_{x} p(x)|x\rangle\langle x|$$

اثر جزئی یک ماتریس قطری، قطری است که کلاسیک بودن زیرسیستم‌های کلاسیک را تایید می‌کند.

می‌دانیم که برای محاسبه‌ی میانگین و یا واریانس X، داشتن توزیع حاشیه‌ای X کافی است و دیگر نیازی به شناختن توزیع مشترک X, Y نیست. در مکانیک کوانتومی اثر جزئی دقیقاً همین نقش توزیع حاشیه‌ای را دارد. برای مثال اگر سیستم ترکیبی A, B را داشته باشیم و بخواهیم با اندازه‌گیری روی سیستم A اطلاعاتی از آن بدست آوریم دیگر نیازی به ماتریس چگالی ρ_{AB} نیست و کافی است ماتریس چگالی کاهیده[۲] سیستم $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$ را داشته باشیم. به عبارت دیگر توزیع احتمال حاصل یک اندازه‌گیری روی بخش A را می‌توان از روی ρ_A محاسبه کرد.

توجه کنید که همان طور که در حالت کلی تساوی $p(x,y) = p(x)p(y)$ برقرار نیست، تساوی $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ نیز لزوما برقرار نیست.

۴ خلاصه نکات

۱. ماتریس چگالی کاهیده مانند مفهوم توزیع چگالی حاشیه‌ای است و همان کاربردها را دارد.

۲. متوسط حالت B مستقل از اندازه گیری روی A است.[۳]

۳. هنگام اندازه‌گیری روی سیستم A توزیع احتمال متناظر را می‌توان مستقیماً از روی ماتریس چگالی کاهیده حساب کرد. $p(0) = \mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0|\rho_A)$. به طور کلی داریم

$$\mathrm{tr}((M_A \otimes I_B)X_{AB}) = \mathrm{tr}(M_A\,\mathrm{tr}_B(X_{AB})).$$

[۲] Reduced density matrix
[۳] No-signaling