مدرس: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری نویسنده: کامران کیخسروی

جلسه ۱۴

فرض کنید حالت سیستم ترکیبی AB را داشته باشیم. حالت سیستم B به تنهایی چیست؟ در ابتدای درس که حالات را به عنوان بردارهایی از فضای هیلبرت معرفی می‌کردیم دیدیم که در حالت کلی نمی‌توان برداری به عنوان حالت سیستم B در نظر گرفت. اما در فرمول‌بندی جدید که ماتریس‌های چگالی (با رتبه دلخواه) را به عنوان حالت سیستم در نظر گرفته‌ایم، می‌توان برای این سؤال جوابی پیدا کرد. در این جلسه عملگری بنام اثر جزئی را معرفی می‌کنیم که با اعمال آن بر روی ماتریس چگالی AB، به ماتریس چگالی سیستم B را می‌رسیم.

در دنیای کلاسیک اثر جزئی همانند محاسبه‌ی توزیع احتمال حاشیه‌ای است. فرض کنید که دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم که دارای یک توزیع مشترک باشند. این توزیع حالت مشترک دو متغیر تصادفی را بصورت یکتا مشخص می‌کند.[1] اما متغیر تصادفی X به تنهایی دارای یک توزیع حاشیه‌ای است که به استفاده از آن می‌توان حالت X به تنهایی را نیز تعریف کرد. عملگری که به دنبال آن هستیم باید ماتریس چگالی مربوط به یک توزیع را به ماتریس چگالی مربوط به توزیع حاشیه‌ای آن ببرد.

۱ خواص اثر جزئی

انگیزه ما از تعریف اثر جزئی[2] این است که بتوانیم برای یک سیستم ترکیبی با حالت مشخص که توسط یک ماتریس چگالی ρ_{AB} داده می‌شود، حالت هر زیر سیستم آن را بدست آوریم. یعنی ماتریس‌های چگالی

$$\sigma_A \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_A), \sigma_B \in \mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$$

را بدست آوریم که حالات زیرسیستم‌های A, B را تعیین کنند.

برخی انتظارات طبیعی ما از اثر جزئی به شرح زیر هستند:

---

[1] فرض کنید که X و Y به ترتیب می‌توانند مقادیر $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ و $\{y_0, y_1, \cdots, y_r\}$ را اخذ کنند. آن وقت حالت سیستم (X, Y) را می‌توان با یک هنگرد توصیف کرد: سیستم (ترکیبی) با احتمال $p(x_i, y_j)$ در حالت

$$|x_i\rangle\langle x_i| \otimes |y_j\rangle\langle y_j| = |x_i, y_j\rangle\langle x_i, y_j|$$

است. پس ماتریس چگالی متناظر با آن برابر است با

$$\rho_{XY} = \sum_{i,j} p(x_i, y_j)|x_i, y_j\rangle\langle x_i, y_j|.$$

[2] Partial trace

- **سازگاری:** اگر حالت سیستم ترکیبی، ضربی[۳] باشد: $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ در این صورت سیستم A به تنهایی در حالت ρ_A و سیستم B به تنهایی در حالت ρ_B است. یعنی باید داشته باشیم:

$$\sigma_A = \rho_A \ \ , \ \ \sigma_B = \rho_B$$

- **اندازه‌گیری:** اگر اندازه‌گیری $\{M_1^B, \dots, M_k^B\}$ را روی سیستم B انجام دهیم، می‌دانیم که این کار متناظر با انجام اندازه‌گیری $\{I \otimes M_1^B, \dots, I \otimes M_k^B\}$ روی کل سیستم است. پس انتظار داریم توزیع احتمال به دست آمده با هر دو نگاه فوق باهم برابر باشند یعنی:

$$p_j = \mathrm{tr}((I \otimes M_j)^\dagger (I \otimes M_j)\rho_{AB}) = \mathrm{tr}(M_j^\dagger M_j \sigma_B).$$

- **تحول زمانی:** اگر تحول زمانی U^A را روی سیستم A اعمال کنیم می‌دانیم که این کار متناظر با اعمال تحول زمانی $U^A \otimes I^B$ روی کل سیستم است یعنی حالت سیستم به $\widetilde{\rho}_{AB} = U^A \otimes I^B \rho_{AB} (U^A)^\dagger \otimes I^B$ تغییر می‌کند. حال اگر اثرهای جزئی سیستم جدید را برابر $\widetilde{\sigma}_A$ و $\widetilde{\sigma}_B$ بگیریم انتظار داریم:

$$\widetilde{\sigma}_A = U_A \sigma_A U_A^\dagger \qquad \text{و} \qquad \widetilde{\sigma}_B = \sigma_B.$$

ثابت می‌کنیم که عملگری به نام اثر جزئی وجود دارد که با اعمال آن روی ρ_{AB} می‌توان σ_A و σ_B را با خواص فوق به دست آورد. همچنین نشان خواهیم داد که عملگر اثر جزئی علاوه بر خواص بالا خاصیت مهم دیگری به نام «عدم علامت دهی»[۴] را هم دارد. این خاصیت در واقع نتیجه‌ای از خواص فوق است که صورت ریاضی آن در زیر آمده است. عدم علامت دهی این است که اگر سیستم ترکیبی AB بین آلیس و باب تقسیم شده باشد، باب با اندازه‌گیری یا تحول زمانی موضعی روی سیستم B به تنهایی، نمی‌تواند پیغامی برای آلیس ارسال کند. به عبارت دیگر علامت دهی یا انتقال پیام به صورت لحظه‌ای با سرعت بیشتر از نور امکان ندارد. برای مثال فرض کنید که هدف باب ارسال یک بیت برای آلیس است. در صورتی که این بیت برابر یک باشد باب یک اندازه‌گیری روی B انجام می‌دهد و در صورتی که این بیت برابر صفر باشد، هیچ کاری انجام نمی‌دهد. در صورتی که وجود یا عدم وجود این اندازه‌گیری برای آلیس قابل کشف باشد، آلیس می‌تواند اطلاعاتی راجع به این بیت بدست آورد.

عدم علامت دهی: هرگونه اندازه‌گیری یا تحول زمانی موضعی روی سیستم B حالت (متوسط) سیستم A را تغییر نمی‌دهد. برای مثال اگر اندازه‌گیری $\{M_1^B, \dots, M_k^B\}$ را روی سیستم B انجام دهیم، می‌دانیم که این کار متناظر با انجام اندازه‌گیری $\{I_A \otimes M_1^B, \dots, I_A \otimes M_k^B\}$ روی کل سیستم است و حالت متوسط کل سیستم را به

$$\mu_{AB} = \sum_{i=1}^{k} (I_A \otimes M_i^B)\rho_{AB}(I_A \otimes M_i^B)^\dagger$$

می‌برد. در این صورت با محاسبه‌ی اثر جزیی ρ_{AB} و μ_{AB} به ماتریس چگالی یکسانی برای سیستم A می‌رسیم.

[۳] Product state
[۴] No Signalling

۲ حدس فرمول اثر با توجه به خاصیت عدم علامت دهی

یک پایه‌ی متعامد یکه دلخواه $\{|w_0\rangle, \dots, |w_{d'-1}\rangle\}$ برای فضای هیبلرت سیستم باب $\mathcal{H}_B$ در نظر بگیرید و فرض کنید که باب سیستم B را در این پایه اندازه بگیرد. در این صورت با احتمال

$$q_i = \mathrm{tr}\big((I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|)\big)$$

باب مقدار i را دریافت کرده و کل سیستم به حالت

$$\sigma_i^{AB} = \frac{1}{q_i}(I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|)$$

سقوط می‌کند. توجه کنید که باب در یک پایه‌ی متعامد یکه اندازه گیری می‌کند و سیستم باب در صورت مشاهده i باید به بردار $|w_i\rangle$ سقوط کند. بنابراین حالت کل سیستم بعد از اندازه‌گیری باید به صورت ضرب تانسوری یک عملگر در فضای A و $|w_i\rangle\langle w_i|$ قابل بیان باشد. این نمایش برابر است با [۵]

$$\sigma_i \otimes |w_i\rangle\langle w_i|$$

که در آن $\sigma_i = \frac{1}{q_i}(I_A \otimes \langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle)$ حالت سیستم A در صورت مشاهده i است.[۶] پس با احتمال q_i حالت سیستم A برابر σ_i است. در نتیجه پس از اعمال اندازه‌گیری حالت سیستم A با یک هنگرد توصیف می‌شود و ماتریس چگالی متناظر آن برابر

$$\sum_i q_i\sigma_i = \sum_i (I_A \otimes \langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle)$$

است. طبق اصل عدم علامت دهی، σ_A حالت متوسط سیستم A قبل از اندازه‌گیری باید برابر حالت آن بعد از اندازه‌گیری باشد. در نتیجه اثر جزئی (که آن را با نماد tr_B نشان می‌دهیم) باید دارای فرمول زیر باشد:

$$\boxed{\sigma_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \textstyle\sum_i (I_A \otimes \langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle)}$$

که در آن $\{|w_0\rangle, \dots, |w_{d'-1}\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه دلخواه برای $\mathcal{H}_B$ بود. در صورتی که یک پایه متعامد یکه دلخواه برای $\mathcal{H}_A$ مانند $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ در نظر بگیریم بصورت مشابه می‌توانیم تعریف کنیم:

---

[۵] این برابری از دو طریق قابل اثبات است. اول اینکه دو طرف این رابطه نسبت به ρ_{AB} خطی هستند. اما میدانیم که هر ماتریس چگالی را میتوان بصورت ترکیب خطی ماتریس های به فرم $|v\rangle\langle v| \otimes |w\rangle\langle w|$ نوشت. در نتیجه کافی است این رابطه را برای ماتریس های چگالی با این فرم ثابت کنیم که در این حالت اثبات آن بدیهی است. راه دیدن این موضوع به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_i}(I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle\langle w_i|) =& \frac{1}{q_i}(I_A \otimes |w_i\rangle)(I_A \otimes \langle w_i|)\rho_{AB}(I_A \otimes |w_i\rangle)(I_A \otimes \langle w_i|)\\
=&(I_A \otimes |w_i\rangle)(\sigma_i \otimes 1_{\mathbb{C}})(I_A \otimes \langle w_i|)\\
=&\sigma_i \otimes |w_i\rangle\langle w_i|
\end{aligned}$$

[۶] دقت کنید که σ_i در فضای $\mathcal{H}_A \otimes \mathbb{C}$ تعریف شده که با $\mathcal{H}_A$ یکریخت است.

$$\boxed{\sigma_B = \mathrm{tr}_A(\rho_{AB}) = \sum_i (\langle v_i| \otimes I^B)\rho_{AB}(|v_i\rangle \otimes I^B).}$$

تشابه این فرمول‌ها با فرمول اثر دلیل نام‌گذاری «اثر جزیی» را نشان می‌دهد.

۳ حدس فرمول اثر با توجه به خاصیت سازگاری

فرض کنید که حالت سیستم ترکیبی، ضربی[۷] باشد: $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ باشد. در این صورت نمایش ماتریسی عملگر ρ_{AB} برابر ضرب تانسوری نمایش ماتریسی عملگرهای ρ_A و ρ_B است. فرض کنید که

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

در این صورت در شکل بلوکی

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B = \begin{pmatrix} a_{11}\rho_B & \cdots & a_{1n}\rho_B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\rho_B & \cdots & a_{nn}\rho_B \end{pmatrix}.$$

اگر این ماتریس را داشته باشیم و بخواهیم ρ_A را پیدا کنیم، کافی است که از هر بلوک بصورت جدا اثر بگیریم و با استفاده از رابطه $\mathrm{tr}\rho_B = 1$ ماتریس را ساده کنیم:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\rho_B & \cdots & a_{1n}\rho_B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\rho_B & \cdots & a_{nn}\rho_B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{tr}\rho_B & \cdots & a_{1n}\mathrm{tr}\rho_B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathrm{tr}\rho_B & \cdots & a_{nn}\mathrm{tr}\rho_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

و جهت یافتن ρ_B کافی است بلوک های روی قطر را جمع بزنیم

$$\begin{pmatrix} a_{11}\rho_B & \cdots & a_{1n}\rho_B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\rho_B & \cdots & a_{nn}\rho_B \end{pmatrix} \mapsto a_{11}\rho_B + a_{22}\rho_B + \cdots + a_{nn}\rho_B = \mathrm{tr}(\rho_A)\rho_B = \rho_B.$$

می‌بینیم که این عملگرهایی که در بالا برای بدست آوردن ρ_A و ρ_B معرفی شدند خطی هستند. با توجه به اینکه ماتریس چگالی هر حالت دلخواه را می‌توان به صورت ترکیب خطی عملگرهای ضرب تانسوری نوشت و مکانیک کوانتمی نظریه‌ای خطی است، محاسبه‌ی اثر جزئی در حالت کلی باید با نگاه به ماتریس چگالی ρ_{AB} به فرم بلوکی و با فرمول‌های فوق صورت بپذیرد. در واقع اثر جزئی را می‌توان با استفاده از

$$\rho_A \otimes \rho_B \mapsto \rho_A \qquad \text{و} \qquad \rho_A \otimes \rho_B \mapsto \rho_B$$

و با گسترش خطی آن روی فضای همه‌ی ماتریس‌های ρ_{AB} تعریف کرد.

در ادامه خواهیم دید این روش محاسبه‌ی اثر جزئی با فرمول‌هایی که در بالا دیدیم سازگار است و جواب مشابهی می‌دهد.

[۷] Product state

۴ یافتن فرمول اثر با استفاده از خاصیت اندازه‌گیری

در این بخش فرمول اثر را از خاصیت اندازه گیری بدست می‌آوریم که نتیجه‌ی آن همان فرمول بخش قبل است. فرض کنید اندازه‌گیری $\{M_j\}$ را روی سیستم B انجام بدهیم و p_j را احتمال این که حاصل اندازه‌گیری j باشد بگیرید. فرض کنید $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}_A$ و $\{|w_0\rangle, \dots, |w_{d'-1}\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}_B$ باشد. می‌دانیم که $\{|v_0\rangle \otimes |w_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle \otimes |w_{d'-1}\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ است. درنتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
p_j &= \mathrm{tr}((I \otimes M_j^\dagger M_j)\rho_{AB}) \\
&= \sum_{l,k} \langle v_k|\langle w_l|(I \otimes M_j^\dagger M_j)\rho_{AB}|v_k\rangle|w_l\rangle \\
&= \sum_{l,k} \big(\langle v_k| \otimes (\langle w_l|M_j^\dagger M_j)\big)\rho_{AB}|v_k\rangle|w_l\rangle
\end{aligned} \tag{۱}
$$

از آنجا که $|v_\alpha\rangle\langle v_\beta|$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$ است و $|w_\gamma\rangle\langle w_\theta|$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)$ است، تانسور آنها یک پایه متعامد یکه برای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ است. پس $r_{\alpha\gamma\beta\theta} \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که:

$$
\rho_{AB} = \sum_{\alpha\gamma\beta\theta} r_{\alpha\gamma\beta\theta}|v_\alpha\rangle\langle v_\beta| \otimes |w_\gamma\rangle\langle w_\theta| = \sum_{\alpha,\beta} |v_\alpha\rangle\langle v_\beta| \otimes T_{\alpha\beta}
$$

که در آن

$$
T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\theta} r_{\alpha\gamma\beta\theta}|w_\gamma\rangle\langle w_\theta|.
$$

توجه کنید که ماتریس نمایش ρ_{AB} در پایه $\{|v_0\rangle \otimes |w_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle \otimes |w_{d'-1}\rangle\}$ برابر است با

$$
\rho_{AB} = \sum_{\alpha,\beta} |v_\alpha\rangle\langle v_\beta| \otimes T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & \dots & T_{0,d-1} \\ T_{10} & T_{11} & \dots & T_{1,d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{d-1,0} & T_{d-1,1} & \dots & T_{d-1,d-1} \end{pmatrix}.
$$

حال با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$
\begin{aligned}
p_j &= \sum_{l,k} \big(\langle v_k| \otimes (\langle w_l|M_j^\dagger M_j)\big)\rho_{AB}|v_k\rangle|w_l\rangle \\
&= \sum_{l,k,\alpha,\beta} (\langle v_k|v_\alpha\rangle\langle v_\beta|v_k\rangle) \cdot (\langle w_l|M_j^\dagger M_j T_{\alpha\beta}|w_l\rangle) \\
&= \sum_{k,l} \langle w_l|M_j^\dagger M_j T_{kk}|w_l\rangle \\
&= \sum_{k} \mathrm{tr}(M_j^\dagger M_j T_{kk}) \\
&= \mathrm{tr}\left(M_j^\dagger M_j \left(\sum_k T_{kk}\right)\right).
\end{aligned}
$$

پس اگر قرار دهیم:

$$\sigma_B = \sum_k T_{kk}$$

نتیجه‌ی مورد نظر حاصل خواهد شد.

توجه کنید که تعریف σ_B در این جا مستقل از عملگرهای اندازه‌گیری M_j است. بنابراین ماتریس تعریف شده σ_B برای تمامی اندازه‌گیری‌ها انتظار ما را از اثر جزئی برآورده می‌کند. یعنی برای محاسبه σ_B کافی است تمامی ماتریس‌های $d' \times d'$ موجود در قطر نمایش ماتریسی ρ_{AB} را با هم جمع کنیم.

حال نشان می‌دهیم فرمولی که در این جا برای σ_B بدست آوردیم با آنچه قبلا داشتیم معادل است. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
(\langle v_\alpha| \otimes I)\rho_{AB}(|v_\beta\rangle \otimes I) &= \sum_{\alpha'\beta'}((\langle v_\alpha| \otimes I)(|v_{\alpha'}\rangle\langle v_{\beta'}| \otimes T_{\alpha'\beta'})(|v_\beta\rangle \otimes I) \\
&= \sum_{\alpha'\beta'}\langle v_\alpha|v_{\alpha'}\rangle\langle v_{\beta'}|v_\beta\rangle T_{\alpha'\beta'} \\
&= T_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\sigma_B = \sum_\alpha T_{\alpha\alpha} = \sum_\alpha((\langle v_\alpha| \otimes I)\rho_{AB}(|v_\alpha\rangle \otimes I),$$

که همان فرمولی است که قبلا داشتیم.

نمادگذاری: همان گونه که توزیع‌های حاشیه‌ای توزیع مشترک P_{XY} با P_X و P_Y نشان داده می‌شوند حالت سیستم A و B در صورتی که حالت سیستم ترکیبی ρ_{AB} باشد با ρ_A و ρ_B نشان داده می‌شوند. در نتیجه داریم

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) \qquad \text{و} \qquad \rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB}).$$

ماتریس‌های ρ_A, ρ_B را نام ماتریس چگالی کاهش یافته یا کاهیده[۸] می‌نامند.

تمرین ۱ عملگرهای tr_A, tr_B خطی هستند و در نتیجه می‌توان ماتریس نمایش این عمگرها را یافت. با در نظر گرفتن پایه‌هایی برای فضاهای $\mathbf{L}(\mathcal{H}_A)$ و $\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)$ ماتریس‌های نمایش عملگرهای tr_A, tr_B را بیابید. برای سادگی فرض کنید: $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$.

مثال ۲ فرض کنید

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

محض باشد و $|\psi\rangle^{AB} = |\psi_1\rangle^A|\psi_2\rangle^B$. در نتیجه

$$\rho_{AB} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

[۸] Reduced density matrix

داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= tr_B(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2|)\\ &= \sum_l (I\otimes\langle w_l|)(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\psi_2\rangle\langle\psi_2|)(I\otimes\langle w_l|)\\ &= \sum_l |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \times \langle w_l|\psi_2\rangle\langle\psi_2|w_l\rangle\\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|(\sum_l \langle w_l|\psi_2\rangle\langle\psi_2|w_l\rangle)\\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|.(tr(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|))\\ &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\end{aligned}$$

تمرین ۳ برای حالت کلی‌تر $\rho_{AB}=\rho_A\otimes\rho_B$ نشان دهید که:

$$tr_A(\rho_{AB})=\rho_B$$

مثال ۴ در این مثال به بررسی حالت بل می‌پردازیم. قرار دهید $|\psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$. ماتریس چگالی متناظر با $|\psi\rangle$ برابر است با

$$\begin{aligned}\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)\\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A\otimes|0\rangle\langle 0|_B + |0\rangle\langle 1|_A\otimes|0\rangle\langle 1|_B + |1\rangle\langle 0|_A\otimes|1\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A\otimes|1\rangle\langle 1|_B).\end{aligned}$$

ماتریس چگالی متناظر با سیستم B برابر است با

$$\rho_B = tr_A\,\rho_{AB} = (\langle 0|\otimes I)\rho_{AB}(|0\rangle\otimes I) + (\langle 1|\otimes I)\rho_{AB}(|1\rangle\otimes I)$$

اما

$$\begin{aligned}(\langle 0|\otimes I)\rho_{AB}(|0\rangle\otimes I) &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle_A\otimes|0\rangle\langle 0|_B + \langle 0|0\rangle\langle 1|0\rangle_A\otimes|0\rangle\langle 1|_B\\ &\qquad + \langle 0|1\rangle\langle 0|0\rangle_A\otimes|1\rangle\langle 0|_B + \langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle_A\otimes|1\rangle\langle 1|_B)\Big).\\ &= \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|_B\end{aligned}$$

مشابها

$$(\langle 1|\otimes I)\rho_{AB}(|1\rangle\otimes I) = \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|_B$$

در نتیجه

$$tr_A\,\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_B) = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

این رابطه بیان می‌کند که کیوبیت B با احتمال مساوی در یکی از حالتهای $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ است.

مثال ۵ حالت در هم تنیده‌ی $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$ برای دو کیوبیت A, B داده شده است. ابتدا ماتریس چگالی متناظر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \frac{1}{4}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|01\rangle\langle 01| + \frac{1}{4}|11\rangle\langle 11| \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle\langle 01| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 00| \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle\langle 11| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|11\rangle\langle 01| \\ &\quad + \frac{1}{4}|11\rangle\langle 00| + \frac{1}{4}|00\rangle\langle 11|.\end{aligned}$$

حال ماتریس‌های چگالی کاهیده را حساب می‌کنیم.

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0|.$$

$$\rho_B = tr_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle\langle 0|.$$

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

می‌خواهیم A را در پایه‌ی $|0\rangle, |1\rangle$ اندازه‌گیری کنیم. احتمالات هر خروجی و حالت‌های جدیدی که سیستم به آنها سقوط می‌کند را بدست می‌آوریم.

$$p(0) = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B)|\psi\rangle = tr((|0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B)\rho_{AB}) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{3}{4}.$$

توجه کنید که $p(0) = 3/4$ برابر است با $tr(|0\rangle\langle 0|\rho_A)$ یعنی همان طور که انتظار داشتیم توزیع احتمال حاصل اندازه‌گیری روی کیوبیت A را مستقیماً می‌توان از ρ_A بدست آورد.

$$|\psi\rangle \quad \xrightarrow{Collapse} \quad |\psi_0\rangle_{AB} = |0\rangle\langle 0|_A \otimes \mathcal{I}_B|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|01\rangle$$

احتمال این که حاصل اندازه‌گیری $\langle 1|$ باشد برابر است با

$$p(1) = tr((|1\rangle\langle 1|_A \otimes \mathcal{I}_B)\rho_{AB}) = \frac{1}{4} = tr(|1\rangle\langle 1|\rho_A)$$

و سقوط سیستم با حالت زیر است

$$|\psi\rangle \quad \xrightarrow{Collapse} \quad |\psi_1\rangle_{AB} = |1\rangle\langle 1|_A \otimes \mathcal{I}_B|\psi\rangle = \frac{1}{2}|11\rangle \sim |11\rangle$$

با وجود اینکه اندازه گیری روی سیستم A انجام شده بود، مشاهده می‌شود که سیستم B نیز تغییر کرده است. حال ماتریس‌های چگالی σ^{AB} را در این حالت‌های جدید بدست می آوریم و با استفاده از آنها ماتریس‌های چگالی کاهیده σ_0^B و σ_1^B را برای حالت‌های جدید سیستم B بدست می آوریم.

$$\sigma_0^{AB} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \qquad \sigma_0^B = tr_A(\sigma_0^{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{AB} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \qquad \sigma_1^B = tr_A(\sigma_1^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین B با احتمال $p(0) = \frac{3}{4}$ به σ_0^B و با احتمال $p(1) = \frac{1}{4}$ به σ_1^B تغییر می کند. پس میانگین سیستم B بعد از اندازه‌گیری برابر است با

$$p(0)\sigma_0^B + p(1)\sigma_1^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \rho_B.$$

مشاهده می‌شود که میانگین سیستم B تغییر نکرد که انتظارش را داشتیم. چون اگر می‌توانستیم با اندازه گیری روی یک سیستم، میانگین سیستم دیگر را تغییر دهیم آنگاه بدون رد و بدل کردن سیگنال می‌توانستیم پیغام بفرستیم که خلاف اصل عدم علامت دهی است.

تمرین ۶ حالت درهم تنیده زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + (1+i)|01\rangle - |11\rangle)$$

ρ_A و ρ_B را به دو روش زیر محاسبه کنید.

(الف) ابتدا c_{ijkl} را در عبارت زیر محاسبه کنید و سپس اثر جزئی بگیرید:

$$|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}|i\rangle\langle j|_A \ \otimes \ |k\rangle\langle l|_B$$

(ب) ابتدا $|\psi_{AB}\rangle$ را به فرم زیر نوشته و سپس از روش (الف) استفاده کنید:

$$|\psi_{AB}\rangle = |0\rangle_A|\phi_0\rangle_B + |1\rangle_A|\phi_1\rangle_B.$$

مشاهده می‌شود که در بسیاری از حالات استفاده از روش دوم محاسبات را آسان‌تر می‌کند.