مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین‌زاده گوهری نویسنده: مجید محزون / کامران کیخسروی

جلسه ۱۲

۱ فرمول‌بندی دیگری برای مکانیک کوانتمی

در این جلسه فرمول‌بندی جدیدی از مکانیک کوانتمی ارائه می‌کنیم که با فرمول‌بندی‌ای که قبلا بیان شده بود معادل است.

فرض کنید یک حالت کوانتمی مانند $|\psi\rangle$ داشته باشیم. در این صورت طبق اصل اول مکانیک کوانتمی حالات کوانتمی $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ یکسان هستند. روش دیگر برای دیدن این مسأله این است که اگر یک اندازه‌گیری توسط عملگرهای $\{M_i\}$ روی حالت $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ انجام دهیم، توزیع حاصل از این اندازه‌گیری با توزیع حاصل از اندازه‌گیری روی حالت $|\psi\rangle$ یکسان خواهد بود زیرا $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ همدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\langle\psi'|M_i^\dagger M_i|\psi'\rangle = e^{-i\theta}e^{i\theta}\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle.$$

فاز ($e^{i\theta}$) که به آن فاز سراسری [1] گفته می‌شود را اصلا نمی‌توان در مشاهدات از یک سیستم کوانتمی دید. بنابراین ترجیح می‌دهیم از فرمول بندی دیگری استفاده کنیم و حالت کوانتمی را با ماتریس $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نمایش دهیم. اگر ماتریس $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ را داشته باشیم، $|\psi\rangle$ صرفنظر از فاز به طور یکتا به دست می‌آید. همچنین اگر دو بردار حالت کوانتمی فقط در یک فاز با هم اختلاف داشته باشند، ماتریس متناظر آن ها یکسان خواهد بود:

$$|\psi'\rangle\langle\psi'| = e^{-i\theta}e^{i\theta}|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

بنابراین با این فرمول بندی یک تناظر یک به یک بین حالات کوانتمی و ماتریس های به شکل $|\psi\rangle\langle\psi|$ برقرار خواهد بود.

مثال ۱ اگر $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ماتریس چگالی متناظر آن برابر است با

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

ماتریس ρ دارای دو خاصیت مهم می باشد:

[1] global phase

۱. ρ مثبت نیمه معین است ($\rho \geq 0$). (در واقع ρ یک ماتریس تصویر و بنابراین هرمیتی است. یکی از مقادیر ویژه ρ، 1 و بقیه مقادیر ویژه آن صفر هستند).

۲. اثر ρ برابر یک است ($\text{tr}(\rho) = 1$).

$$\text{tr}(\rho) = \text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{tr}(\langle\psi|\psi\rangle) = \langle\psi|\psi\rangle = \||\psi\rangle\|^2.$$

تعریف ۲ هر ماتریس (یا عملگر) ρ که دارای دو خاصیت فوق باشد ماتریس چگالی خوانده می‌شود.

اگر سیستم در حالت $|\psi\rangle$ باشد و اندازه‌گیری $\{M_i\}$ را روی آن اعمال کنیم، احتمال این که حاصل اندازه‌گیری i باشد برابر است با:

$$p(i) = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \text{tr}\left(M_i^\dagger M_i|\psi\rangle\langle\psi|\right) = \text{tr}\left(M_i^\dagger M_i\rho\right).$$

یعنی می‌توان توزیع احتمال حاصل از اندازه‌گیری را بر حسب ماتریس ρ نوشت.

همچنین اگر یک تحول زمانی داشته باشیم:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow U|\psi\rangle \\ \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &\rightarrow U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger = U\rho U^\dagger. \end{aligned}$$

یعنی می‌توان حاصل تحول زمانی را بر حسب ماتریس ρ نوشت.

بنابراین می‌توان مکانیک کوانتمی را به جای بردارهای حالت بر حسب چنین ماتریس‌هایی فرمول بندی کرد.

۱.۱ یک مثال

با یک مثال ادامه می‌دهیم که هدف آن انگیزه دادن به مفهومی بنام «هنگرد»[۲] و ماتریس چگالی مربوط به آن است. سپس هنگرد را بصورت دقیق تعریف کرده و ماتریس چگالی آن را تحت اندازه‌گیری بررسی می‌کنیم.

مثال ۳ ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|.$$

ρ مثبت نیمه معین است و اثر آن برابر یک می‌باشد، اما به صورت $|\psi\rangle\langle\psi|$ قابل نوشتن نیست زیرا رتبه آن برابر دو است، اما رتبه هر ماتریس به شکل $|\psi\rangle\langle\psi|$ برابر یک است. قصد داریم چنین ماتریس‌هایی را نیز وارد فرمول بندی خود کنیم. جهت انجام این کار سناریویی را طراحی می‌کنیم که همین ماتریس σ در محاسبات آن ظاهر شود. فرض کنید یک کیوبیت با

[۲] Ensemble

احتمال $\frac{1}{2}$ در حالت $|0\rangle$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ درحالت $|1\rangle$ آماده‌سازی شده باشد و این کیوبیت را با عملگرهای $\{M_1, ..., M_k\}$ اندازه‌گیری کنیم. توزیع احتمال حاصل از اندازه‌گیری عبارتست از:

$$\begin{aligned} Pr(\text{حاصل اندازه گیری } j \text{ باشد}) &= \frac{1}{2}Pr(\text{حاصل اندازه گیری } j \text{ باشد به شرط این که حالت سیستم } |0\rangle \text{ باشد}) \\ &+ \frac{1}{2}Pr(\text{حاصل اندازه گیری } j \text{ باشد به شرط این که حالت سیستم } |1\rangle \text{ باشد}) \\ &= \frac{1}{2}\langle 0|M_j^\dagger M_j|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1|M_j^\dagger M_j|1\rangle \\ &= \frac{1}{2}tr(M_j^\dagger M_j|0\rangle\langle 0|) + \frac{1}{2}tr(M_j^\dagger M_j|1\rangle\langle 1|) \\ &= tr(M_j^\dagger M_j(\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|)) \\ &= tr(M_j^\dagger M_j\sigma) \end{aligned}$$

می‌بینیم که ماتریس σ در محاسبات ظاهر شده است.

۲.۱ هنگرد

فرض کنید آلیس یک سیستم کوانتمی را با احتمال p_1 در حالت $|\psi_1\rangle$ و با احتمال p_2 درحالت $|\psi_2\rangle$ و ... و با احتمال p_r درحالت $|\psi_r\rangle$ آماده‌سازی کرده و در اختیار باب قرار داده باشد. داریم $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$.

از نقطه نظر باب حالت سیستم با مجموعه زوج‌های مرتب $\{p_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1,2,\dots,r}$ توصیف می‌شود. به این مجموعه از زوج‌های مرتب، یک هنگرد[۳] می‌گوییم. متناظر با هر هنگرد یک ماتریس چگالی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

عملگر ρ ترکیب خطی یک سری ماتریس مثبت نیمه معین با ضرایب مثبت است و در نتیجه مثبت نیمه معین است و داریم:

$$tr(\rho) = \sum_{i=1}^{m} p_i tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

پس در نتیجه ماتریس ρ یک ماتریس چگالی است.

دقت کنید که در حالت خاصی که هنگرد ما با احتمال یک، یک حالت خاص $|\psi\rangle$ را بگیرد، این تعریف از ماتریس چگالی به همان ماتریس $|\psi\rangle\langle\psi|$ منجر می‌شود که سازگاری تعریف را نشان می‌دهد. در صورتی که ماتریس چگالی را بتوان به صورت $|\psi\rangle\langle\psi|$ نوشت (رتبه ماتریس یک باشد) آن را یک ماتریس چگالی «خالص»[۴] و در حالت کلی آن را مرکب[۵] می‌گوییم.

نکته ۴ ماتریس چگالی احتمال برای یک سیستم واحد می‌تواند از نقطه نظر اشخاص مخلتف تفاوت کند. مثلا از نظر آلیس که سیستم کوانتمی را تهیه کرده است، حالت سیستم کاملا مشخص است. اما از نظر باب که از نحوه تولید سیستم

[۳] Ensemble of pure states
[۴] Pure
[۵] Mixed

توسط آلیس مطلع نیست، ماتریس چگالی مربوط به هنگرد بیانگر اطلاعات او از سیستم کوانتمی می باشد. توجه کنید که این نکته در مورد متغیرهای تصادفی در دنیای کلاسیک نیز برقرار است و مختص فیزیک کوانتمی نیست.

نکته ۵ برای هر هنگرد دقیقا یک ماتریس چگالی وجود دارد، اما بر عکس این موضوع درست نیست: دو هنگرد متفاوت می‌توانند ماتریس چگالی یکسان داشته باشند. مثلا

$$\frac{1}{2}\big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\big) = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\big(|w_0\rangle\langle w_0| + |w_1\rangle\langle w_1|\big)$$

برای هر پایه متعامد یکه دلخواه $\{|w_0\rangle, |w_1\rangle\}$.

مثال‌های پیچیده‌تری هم می‌توان زد:

مثال ۶ فرض کنید که یک کیوبیت با احتمال $3/4$ در حالت $|0\rangle$ و با احتمال $1/4$ در حالت $|1\rangle$ باشد. ماتریس چگالی متناظر برابر است با:

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

حال یک هنگرد دیگر در نظر بگیرید که با احتمال مساوی در یکی از دو حالت زیر باشد:

$$|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, \quad |b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle.$$

ماتریس چگالی متناظر به صورت زیر است:

$$\sigma = \frac{1}{2}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{2}|b\rangle\langle b| = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| = \rho.$$

یعنی ماتریس‌های چگالی متناظر با دو هنگرد $\{3/4, |0\rangle;\ \ 1/4, |1\rangle\}$ و $\{1/2, |a\rangle;\ \ 1/2, |b\rangle\}$ برابرند.

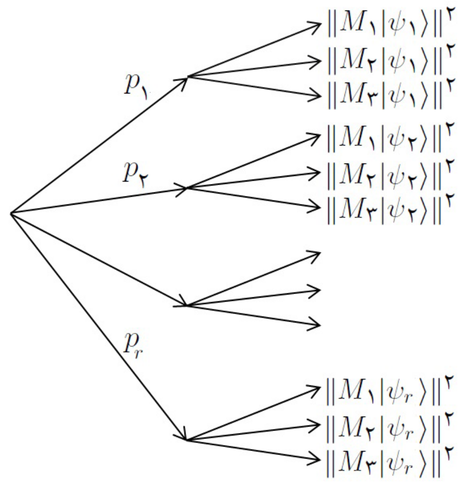
حال هنگرد سومی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید سیستم ما با احتمال p در حالت هنگرد اول و با احتمال $q = 1-p$ در حالت هنگرد دوم قرار داده شده باشد. به عبارتی هنگرد $\{3p/4, |0\rangle;\ \ p/4, |1\rangle;\ \ q/2, |a\rangle;\ \ q/2, |b\rangle\}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\gamma = \frac{3p}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{p}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{q}{2}|a\rangle\langle a| + \frac{q}{2}|b\rangle\langle b| = p\rho + q\rho = \rho.$$

نکته ۷ فرض کنید که ρ یک ماتریس چگالی باشد. از آنجا که ρ مثبت نیمه معین است می‌توان آن را در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری کرد

$$\rho = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

که در آن $\lambda_i \geq 0$ و از آنجا که $tr\rho = 1$ داریم $\sum_i \lambda_i = 1$. پس می‌توان هنگرد $\{\lambda_i, |v_i\rangle\}$ را در نظر گرفت که به وضوح ماتریس چگالی آن ρ است. نتیجه این که برای هر ماتریس چگالی حداقل یک هنگرد وجود دارد. ولی همان طور که مثال‌های بالا نشان می‌دهند این هنگرد یکتا نیست.



شکل ۱: احتمالات مربوط به حالات مختلف و نتایج اندازه گیری هنگرد $(p_i, |\psi_i\rangle)_{i=1,2,\cdots,r}$ با عملگرهای $\{M_1, ..., M_k\}$.

تمرین ۸ (آزمون خالص بودن یا نبودن ماتریس چگالی) نشان دهید برای هر ماتریس چگالی ρ داریم $tr(\rho^2) \leq 1$ و تساوی حاصل می‌شود اگر و تنها اگر ρ خالص باشد.

تحول زمانی و اندازه‌گیری روی یک هنگرد

فرض کنید یک هنگرد با احتمال p_i در حالت $|\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ آماده‌سازی شده باشد. تحول زمانی U را روی این هنگرد بصورت طبیعی قابل تعریف است. با احتمال p_i سیستم در حالت $|\psi_i\rangle$ می‌باشد و پس از تحول زمانی سیستم به حالت $U|\psi_i\rangle$ تغییر می‌کند. پس هنگرد جدید با زوج مرتب $\{p_i, U|\psi_i\rangle\}_{i=1,2,\cdots,r}$ توصیف می‌شود. همچنین ماتریس چگالی متناظر با هنگرد جدید برابر است با

$$\sum_i p_i U|\psi_i\rangle\langle\psi_i|U^\dagger = U\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)U^\dagger = U\rho U^\dagger.$$

حال فرض کنید که یک هنگرد را با عملگرهای $\{M_1, ..., M_k\}$ اندازه‌گیری کنیم. با احتمال p_i سیستم در حالت $|\psi_i\rangle$ می‌باشد و از این حالت پس از اندازه‌گیری با احتمال $||M_j|\psi_i\rangle||^2$ سیستم به حالت

$$\frac{M_j|\psi_i\rangle}{||M_j|\psi_i\rangle||},$$

سقوط می‌کند. احتمالات مربوط به حالات مختلف و نتایج اندازه گیری هنگرد در شکل ۲.۱ آمده است.

حال دو حالت مختلف را می‌توان متصور شد و با استفاده از آن دو هنگرد جدید را تعریف کرد.

-1 در صورتی که اندازه گیری را انجام دهیم، اما قبل از نگاه کردن به آن نتیجه آزمایش را از دست بدهیم. در این صورت طبق اصل ضرب هنگرد ما بشکل

$$\left\{p_i||M_j|\psi_i\rangle||^2, \quad \frac{M_j|\psi_i\rangle}{||M_j|\psi_i\rangle||}\right\}_{i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,k}$$

خواهد بود. توجه کنید که تعداد حالات مختلف این هنگرد جدید rk است. طبق تعریف ماتریس چگالی متناظر با این هنگرد برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} p_i \|M_j|\psi_i\rangle\|^2 \left(\frac{1}{\|M_j|\psi_i\rangle\|^2} M_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_j^\dagger\right) &= \sum_{i,j} p_i M_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_j^\dagger \\ &= \sum_j M_j \left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) M_j^\dagger \\ &= \sum_j M_j\rho M_j^\dagger.\end{aligned}$$

$2-$ در صورتی که نتیجه اندازه گیری را پس از انجام آن ببینیم. فرض کنید که عددی مانند j را به عنوان نتیجه آزمایش بدست آوریم. در این صورت با استفاده از قانون بیز داریم:

$$Pr(\text{سیستم در حالت } i \text{ آماده بوده است به شرط این که حاصل اندازه گیری } j \text{ باشد}) = \frac{p_i\|M_j|\psi_i\rangle\|^2}{\sum_l p_l\|M_j|\psi_l\rangle\|^2}$$

در نتیجه سیستم جدید ما با این احتمال شرطی در حالت

$$\frac{M_j|\psi_i\rangle}{\|M_j|\psi_i\rangle\|}$$

قرار خواهد گرفت. در این صورت هنگرد ما به شکل

$$\left\{\frac{p_i\|M_j|\psi_i\rangle\|^2}{\sum_l p_l\|M_j|\psi_l\rangle\|^2},\ \frac{M_j|\psi_i\rangle}{\|M_j|\psi_i\rangle\|}\right\}_{i=1,2,\cdots,r}$$

خواهد بود. توجه کنید که تعداد حالات مختلف این هنگرد جدید r است. ماتریس چگالی متناظر با این هنگرد برابر است با

$$\frac{1}{\alpha_j}\sum_{i=1}^{r} p_i M_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_j^\dagger = \frac{1}{\alpha_j}M_j\rho M_j^\dagger$$

که در آن $\alpha_j = \sum_l p_l\|M_j|\psi_l\rangle\|^2 = \mathrm{tr}(M_j\rho M_j^\dagger)$.

دیدیم که در هر دو حالت ماتریس چگالی متناظر را می‌توان بر حسب ماتریس چگالی هنگرد اولیه نوشت.

۳.۱ ماتریس چگالی حالت یک سیستم کوانتمی است

در قسمت قبل در واقع قضیه‌ی زیر را ثابت کردیم.

قضیه ۹ یک هنگرد دلخواه را در نظر بگیرید. در این صورت

- هر تحول زمانی دلخواه U این هنگرد را به هنگرد جدیدی تبدیل می‌کند که ماتریس چگالی متناظر آن را می‌توان بر حسب U و ماتریس چگالی هنگرد اولیه یافت.

$$\rho \to U\rho U^\dagger.$$

- فرض کنید که عملگرهای اندازه‌گیری دلخواه $\{M_1, ..., M_k\}$ را روی یک هنگرد اعمال کنیم. در این صورت توزیع احتمال حاصل از اندازه‌گیری را می‌توان بر حسب $\{M_1, ..., M_k\}$ و ماتریس چگالی هنگرد اولیه یافت. بعلاوه در اثر انجام آزمایش، سیستم تغییر حالت خواهد داد که این تغییر حالت احتمالاتی بوده و به نتیجه انجام آزمایش بستگی دارد. متناظر با نتیجه این آزمایش و بسته به اینکه نتیجه این آزمایش در اختیار ما باشد یا نه، می‌توان دو هنگرد جدید تعریف کرد و ماتریس چگالی هر کدام را بر حسب $\{M_1, ..., M_k\}$ و ماتریس چگالی هنگرد اولیه یافت.

$$\rho \to \sum_j M_j \rho M_j^\dagger \qquad \text{یا} \qquad \rho \to \frac{1}{tr(M_j\rho M_j^\dagger)} M_j \rho M_j^\dagger.$$

این قضیه در واقع این نکته را بیان می‌کند که در صورتی که ماتریس چگالی یک هنگرد را بدانیم می‌توان هرگونه تحول زمانی و اندازه‌گیری روی این هنگرد را (از لحاظ آماری) پیش بینی کنیم.

برای هر هنگرد دقیقا یک ماتریس چگالی وجود دارد، اما بر عکس این موضوع درست نیست: دو هنگرد متفاوت می‌توانند ماتریس چگالی یکسان داشته باشند. مثلا دیدیم که

$$\frac{1}{2}\big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\big) = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\big(|w_0\rangle\langle w_0| + |w_1\rangle\langle w_1|\big)$$

برای هر پایه متعامد یکه دلخواه $\{|w_0\rangle, |w_1\rangle\}$. نتیجه قضیه بالا این است که در صورتی که دو همگرد دارای ماتریس چگالی یکسان باشند، در هر آزمایش فیزیکی‌ای کاملا رفتار مشابه خواهند داشت. به عبارت دیگر هیچ آزمایشی وجود ندارد که تمایز میان دو همگرد با ماتریس چگالی یکسان را آشکار کند. بنابراین می‌توان ماتریس چگالی را حالت یک سیستم قلمداد کرد، زیرا تمامی اطلاعات مربوط به سیستم (که ما به آنها دسترسی داریم) را در بر دارد.

جهت توضیح بیشتر، دو هنگرد متفاوت را در نظر بگیرید که دارای ماتریس چگالی یکسان باشند. اگر آلیس سکه‌ای بیندازد و بر اساس نتیجه سکه یکی از این دو هنگرد را انتخاب و سیستمی را از آن هنگرد تولید کرده و به باب تحویل دهد، باب با انجام هرگونه اندازه‌گیری روی این سیستم نمی‌توانید اطلاعاتی راجع به اینکه نتیجه سکه‌ی آلیس چه بوده بدست آورد. مثالی از دنیای کلاسیک در انتقال بهتر این مفهوم کمک می‌کند.

مثال ۱۰ بازی زیر را در نظر بگیرید: فرد اول سکه‌ای را می‌اندازد، در صورتی که سکه رو آمد سکه دیگری با احتمال رو آمدن $\frac{1}{2}$ را پرتاب می‌کند در صورتی که سکه دوم رو آمد با احتمال $\frac{3}{4}$ صفر و با احتمال $\frac{1}{4}$ یک را به عنوان خروجی می‌دهد و در صورتی که سکه دوم پشت آمد با احتمال $\frac{3}{4}$ یک و با احتمال $\frac{1}{4}$ صفر را به عنوان خروجی می‌دهدو در نهایت اگر سکه اول پشت آمد خروجی را با احتمال مساوی برابر با صفر یا یک قرار خواهد داد. حال نفر دوم که تنها به خروجی دسترسی دارد به هیچ وجه نمی‌تواند در مورد پشت یا رو آمدن سکه اول اظهار نظر کند زیرا خروجی در هر دو حالت با احتمال مساوی برابر با صفر یا یک است.

تمرین ۱۱ نشان دهید هیچ اندازه‌گیری وجود ندارد که دو هنگرد زیر برای یک کیوبیت را از هم تمیز دهد:

الف: $|0\rangle$ با احتمال $\frac{1}{2}$ و $|1\rangle$ با احتمال $\frac{1}{2}$

ب: $|0\rangle$ با احتمال $\frac{1}{3}$ و $\cos(\pi/3)|0\rangle + \sin(\pi/3)|1\rangle$ با احتمال $\frac{1}{3}$ و $\cos(2\pi/3)|0\rangle + \sin(2\pi/3)|1\rangle$ با احتمال $\frac{1}{3}$

۴.۱ نکات تکمیلی

به متغیرهای تصادفی و یا به عبارتی به هر توزیع احتمال (کلاسیک) $\{p_i\}$ نیز می‌توان یک ماتریس چگالی نسبت داد. برای این کار معمولا یک پایه‌ی متعامد یکه $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ برای فضای هیلبرت مشخص می‌کنند که به آن پایه‌ی استاندارد می‌گویند و ماتریس چگالی متناظر با توزیع احتمال $\{p_i\}$ را برابر ماتریس قطری در پایه‌ی استاندارد می‌گیرند که درایه i-ام روی قطر آن p_i است:

$$\rho = \sum_{i=0}^{d-1} p_i |i\rangle\langle i|.$$

به عنوان تعمیمی از تعریف هنگرد می‌توان گفت اگر سیستم با احتمال p_i در حالتی باشد که به وسیله ماتریس چگالی ρ_i تعریف شود هنگرد مربوط به آن را به صورت $\{p_i, \rho_i\}$ بیان کرده و ماتریس زیر را متناظر با آن تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} p_i \rho_i$$

۲ جمع بندی

بحث این جلسه ابتدا نشان داد که می‌توانیم به جای بردار $|\psi\rangle$ با ماتریس $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ کار کنیم. دیدیم که در صورتی که بردار حالت در یک فاز $e^{i\theta}$ ضرب شود، ماتریس چگالی متناظر، عوض نمی‌گردد. اما می‌دانیم با ضرب یک بردار حالت در یک فاز، تغییری در حالت سیستم ایجاد نخواهد شد و بنابراین قراردادن یک ماتریس چگالی برای دو حالت ذکر شده ضعفی برای این تعریف محسوب نمی‌شود. در صورتی که یک ماتریس چگالی ρ دارای مرتبه یک باشد می‌توانیم بردار حالت متناظر آن را تا حد یک ضریب فاز به صورت یکتا مشخص کنیم.

در این فرمول‌بندی، اگر بدانیم حالت سیستم $|\psi\rangle$ است، ماتریس $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ را می‌سازیم که مثبت نیمه معین است و اثر آن برابر یک می‌باشد و اگر حالت سیستم را ندانیم و فقط بدانیم که با احتمال p_i در حالت $|\psi_i\rangle$ است، ماتریس $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ را می‌سازیم که مثبت نیمه معین است و اثر آن برابر یک می‌باشد. سپس با اثبات یک قضیه تعریف ماتریس چگالی متناظر با یک هنگرد را توجیه کردیم؛ دیدیم که می‌توان ماتریس چگالی را حالت یک سیستم قلمداد کرد چون نتیجه هرگونه آزمایش فیزیکی روی سیستم با داشتن ماتریس چگالی متناظر هنگرد (و بدون دسترسی به خود هنگرد) قابل محاسبه است.