نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱

مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

جلسه ۸

---

۱ تبدیلات خطی رو فضاهای تانسوری

فرض کنید $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ تبدیل خطی دلخواهی از فضای $\mathcal{V}$ به خودش و $S \in \mathbf{L}(\mathcal{W})$ تبدیل خطی دلخواهی از فضای $\mathcal{W}$ به خودش باشد. در این صورت می‌خواهیم عملگر $T \otimes S$ از فضای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ به خودش را تعریف کنیم:

$$T \otimes S : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}.$$

برای تمامی اعضای فضای تانسوری به شکل $|v\rangle \otimes |w\rangle$ عملگر را اینگونه تعریف میکنیم:

$$(T \otimes S)|v\rangle \otimes |w\rangle = (T|v\rangle) \otimes (S|w\rangle).$$

با گسترش خطی $T \otimes S$ را روی همه‌ی $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ اینگونه تعریف میکنیم:

$$(T \otimes S)\left(\sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle\right) := \sum_i c_i (T|v_i\rangle) \otimes (S|w_i\rangle).$$

این نحوه تعریف خودسازگار است. مشابه کاری که جلسه قبل جهت اثبات سازگاری انجام می‌دادیم، باید نشان دهیم که سه خاصیت اصلی فضای تانسوری در مورد عملگرمان نیز برقرار است. یعنی

$$\begin{aligned}
(T \otimes S)\Big((c|v\rangle) \otimes |w\rangle\Big) &= (T \otimes S)\Big(|v\rangle \otimes (c|w\rangle)\Big) = (T \otimes S)\Big(c(|v\rangle \otimes |w\rangle)\Big),\\
(T \otimes S)\Big(|v\rangle \otimes (|w\rangle + |w'\rangle)\Big) &= (T \otimes S)\Big(|v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w'\rangle\Big),\\
(T \otimes S)\Big((|v\rangle + |v'\rangle) \otimes |w\rangle\Big) &= (T \otimes S)\Big(|v\rangle \otimes |w\rangle + |v'\rangle \otimes |w\rangle\Big).
\end{aligned}$$

این روابط به سادگی قابل اثبات شدن هستند زیرا

$$\begin{aligned}
T|v\rangle \otimes S(|w\rangle + |w'\rangle) &= T|v\rangle \otimes S|w\rangle + T|v\rangle \otimes S|w'\rangle,\\
T(|v\rangle + |v'\rangle) \otimes S|w\rangle &= T|v\rangle \otimes S|w\rangle + T|v'\rangle \otimes S|w\rangle.
\end{aligned}$$

۱.۱ نمایش ماتریسی عملگرهای ضرب تانسوری

پایه دلخواه $\{|v_i\rangle\}$ برای $\mathcal{V}$ و پایه دلخواه $\{|w_j\rangle\}$ برای $\mathcal{W}$ در نظر بگیرید. در این صورت دنباله زیر

$$\{|v_1\rangle|w_1\rangle, |v_1\rangle|w_2\rangle, \dots, |v_1\rangle|w_m\rangle, |v_2\rangle|w_1\rangle, |v_2\rangle|w_2\rangle, \dots, |v_2\rangle|w_m\rangle, \dots,$$
$$|v_n\rangle|w_1\rangle, |v_n\rangle|w_2\rangle, \dots, |v_n\rangle|w_m\rangle\} \tag{1}$$

یک پایه برای فضای تانسوری تشکیل میدهد. دقت کنید که مشخص کردن ترتیب اعضای این پایه در نمایش ماتریسی عملگر مهم است.

سوال اصلی این است که نمایش ماتریسی $T \otimes S$ بر حسب نمایش ماتریسی T و S چیست؟

بیاد آورید که اگر $T|v_i\rangle$ را بصورت $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j\rangle$ بسط میدادیم، آنوقت نمایش ماتریسی عملگر T همان $A = (a_{ij})$ خواهد بود.مشابها اگر $t|w_k\rangle$ را بصورت $\sum_{l=1}^{m} b_{kl}|v_l\rangle$ بسط میدادیم، آنوقت نمایش ماتریسی عملگر S همان $B = (b_{kl})$ خواهد بود.

حال داریم:

$$\begin{aligned}(T \otimes S)(|v_i\rangle \otimes |w_k\rangle) &= (T|v_i\rangle \otimes S|w_k\rangle) \\ &= \big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j\rangle\big) \otimes \big(\sum_{l=1}^{m} b_{kl}|w_l\rangle\big) \\ &= \sum_{j,l} a_{ij}b_{kl}|v_i\rangle \otimes |w_l\rangle\end{aligned}$$

در نتیجه نمایش ماتریسی عملگر $T \otimes S$ همان $(a_{ij}b_{kl})$ خواهد بود. این ماتریس برابر است با

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

یا بصورت مبسوط

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1m} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1m} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2m} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{mm} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{m1} & a_{1n}b_{m2} & \cdots & a_{1n}b_{mm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1m} & \cdots & \cdots & a_{nn}b_{11} & a_{nn}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1m} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2m} & \cdots & \cdots & a_{nn}b_{21} & a_{nn}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m1}b_{m2} & \cdots & a_{m1}b_{mm} & \cdots & \cdots & a_{nn}b_{m1} & a_{nn}b_{m2} & \cdots & a_{nn}b_{mm} \end{pmatrix}.$$

مثال ۱

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1\cdot 0 & 1\cdot 5 & 2\cdot 0 & 2\cdot 5\\ 1\cdot 6 & 1\cdot 7 & 2\cdot 6 & 2\cdot 7\\ \hline 3\cdot 0 & 3\cdot 5 & 4\cdot 0 & 4\cdot 5\\ 3\cdot 6 & 3\cdot 7 & 4\cdot 6 & 4\cdot 7\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 0 & 10\\ 6 & 7 & 12 & 14\\ \hline 0 & 15 & 0 & 20\\ 18 & 21 & 24 & 28\end{array}\right).$$

توجه کنید که گرچه به ازای هر T و S به صورت فوق می‌توان $T \otimes S \in \mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ را در نظر گرفت، ولی لزوماً هر نگاشت خطی $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ را نمی‌توان به صورت $T\otimes S$ نوشت زیرا ماتریس نمایش مربوط به عملگرهای ضرب تانسوری دارای ساختار خاصی هستند. عملگرهای $T\otimes S$ تبدیلات خاصی در فضای $\mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ هستند.

۲.۱ ترکیب عملگرهای تانسوری

بررسی درستی خاصیت زیر ساده است

$$(T \otimes S)\cdot(T' \otimes S') = (TT') \otimes (SS'), \qquad (۲)$$

رابطه بالا نتیجه می‌دهد که

$$(T \otimes I)\cdot(I \otimes S) = (I \otimes T)\cdot(S \otimes I) = T \otimes S.$$

با توجه به اینکه عملگر $I_{\mathcal{V}} \otimes I_{\mathcal{W}}$ همان $I_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}}$ است می‌توان از رابطه (۲) استفاده کرد تا نتیجه گرفت

$$(T \otimes S)^{-1} = T^{-1} \otimes S^{-1}.$$

در نتیجه ضرب تانسوری دو عملگر وارون‌پذیر، وارون‌پذیر است. در مورد جمع عملگرهای تانسوری خاصیت زیر داریم:

$$(T \otimes S) + (T' \otimes S) = (T + T') \otimes S,$$

اما جمع

$$(T \otimes S) + (T' \otimes S')$$

را لزوما نمی‌توان بصورت یک عملگر تانسوری نوشت. این موضوع تاییدی بر آنچه قبلا گفتیم است که هر نگاشت خطی $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ را نمی‌توان به صورت $T\otimes S$ نوشت.

۳.۱ الحاقی

قضیه ۲ الحاقی یک عملگر ضرب تانسوری به شرح زیر بدست می آید:

$$(T \otimes S)^{\dagger} = T^{\dagger} \otimes S^{\dagger}.$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم که برای هر بردار دلخواه Φ و Ψ رابطه زیر برقرار است:

$$\big((T^\dagger \otimes S^\dagger)\Phi, \Psi\big) = \big(\Phi, (T \otimes S)\Psi\big)$$

بدلیل خطی بودن ضرب داخلی کافی است رابطه بالا را برای بردارهای Φ و Ψ به شکل ضرب تانسوری ثابت کنیم:

$$\big((T^\dagger \otimes S^\dagger)(|v_1\rangle \otimes |w_1\rangle),\ |v_2\rangle \otimes |w_2\rangle\big) = \big(|v_1\rangle \otimes |w_1\rangle, (T \otimes S)(|v_2\rangle \otimes |w_2\rangle)\big)$$

اما در این صورت رابطه بالا معادل است با

$$\big((T^\dagger|v_1\rangle \otimes S^\dagger|w_1\rangle),\ |v_2\rangle \otimes |w_2\rangle\big) = \big(|v_1\rangle \otimes |w_1\rangle, (T|v_2\rangle \otimes S|w_2\rangle)\big)$$

یا

$$\big(T^\dagger|v_1\rangle, |w_1\rangle\big) \times \big(S^\dagger|v_2\rangle, |w_2\rangle\big) = \big(|v_1\rangle, T|w_1\rangle\big) \times \big(|v_2\rangle, S|w_2\rangle\big)$$

که واضحا برقرار است. $\square$

تمرین ۳ ثابت کنید که ضرب تانسوری عملگرهای یکانی، یکانی است. ضرب تانسوری عملگرهای نرمال، نرمال است. و ضرب ماتریسی عملگرهای هرمیتی، هرمیتی است.

برعکس روابط بالا برقرار نیست. مثلا ماتریس

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هرمیتی نیست اما

$$A \otimes A = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هرمیتی است.

تمرین ۴ ثابت کنید که اگر T و T' جابجا شوند، و S و S' جابجا شوند، آنوقت $T \otimes S$ و $T' \otimes S'$ هم جابجا می‌شوند. بعدا خواهیم دید که عکس این موضوع برقرار نیست.

۴.۱ بردار ویژه و مقدار ویژه

فرض کنید که $|v\rangle$ بردار ویژه‌ی T با مقدار ویژه‌ی λ و $|w\rangle$ بردار ویژه‌ی S با مقدار ویژه‌ی μ است. در این صورت

$$(T \otimes S)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (T|v\rangle) \otimes (S|w\rangle) = \lambda\mu|v\rangle \otimes |w\rangle$$

پس $|v\rangle \otimes |w\rangle$ یک بردار ویژه $T \otimes S$ با مقدار ویژه $\lambda\mu$ است. اما آیا ممکن است که مقدار ویژه ای بجز ضرب مقدار ویژه های T و S داشته باشد؟ جواب منفی است.

قضیه ۵ مقادیر ویژه ضرب تانسوری دو عملگر برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه عملگرها است.

اثبات: اثبات اول (با استفاده از آنالیز ماتریسی):

پایه دلخواهی را برای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ در نظر بگیرید و پایه فضای ضرب تانسوری را از روی آن بسازید. ماتریس عملگر T را با A و ماتریس عملگر S را با B نشان میدهیم. طبق قضیه تجزیه شور، توسط ماتریس های وارونپذیر (یکانی) می‌توان ماتریس‌های A و B را بالا مثلثی کرد. پس U و W وجود دارند به طوری که

$$A = UMU^\dagger, \quad B = VNV^\dagger$$

در نتیجه

$$A \otimes B = (UMU^\dagger \otimes VNV^\dagger) = (U \otimes V)(M \otimes N)(U^\dagger \otimes V^\dagger)$$

اما

$$(U^\dagger \otimes V^\dagger) = (U^{-1} \otimes V^{-1}) = (U \otimes V)^{-1}$$

در نتیجه مقادیر ویژه‌ی $A \otimes B$ و $M \otimes N$ با هم مساویند. اما ضرب تانسوری دو ماتریس بالا مثلثی، بالا مثلثی است و بعلاوه ضرایب روی قطر این دو ماتریس در هم ضرب شده و روی قطر ظاهر می‌شوند. پس مقادیر ویژه ضرب تانسوری دو عملگر برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه عملگرها است.

اثبات دوم برای یک حالت خاص با استفاده از آنالیز عملگرها:

حالت خاصی را در نظر بگیرید که T و S نرمال هستند. در این صورت هر دو در پایه‌هایی متعامد یکه قطری شدنی هستند. یعنی پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ برای $\mathcal{V}$ و اعداد $\lambda_i \in \mathcal{C}$ وجود دارند که

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

در نتیجه $T|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$. یعنی $|v_i\rangle$ بردار ویژه‌ی T با مقدار ویژه‌ی λ_i است. به طور مشابه داریم

$$S = \sum_{j=1}^{m} \mu_j |w_j\rangle\langle w_j|$$

که در آن $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{W}$ است و $S|w_j\rangle = \mu_j|w_j\rangle$. از این دو رابطه نتیجه می شود که برای هر k, l داریم

$$(T \otimes S)|\phi_k\rangle \otimes |w_l\rangle = T|\phi_k\rangle \otimes S|w_l\rangle = (\lambda_k|\phi_k\rangle) \otimes (\mu_l|w_l\rangle) = \lambda_k\mu_l|\phi_k\rangle \otimes |w_l\rangle.$$

بنابراین $|\phi_k\rangle \otimes |w_l\rangle$ یک بردار ویژه‌ی $T \otimes S$ با مقدار ویژه‌ی $\lambda_k\mu_l$ است. از آنجا که مجموعه‌ی بردارهای $|\phi_k\rangle \otimes |w_l\rangle$ یک پایه برای فضای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ تشکیل می‌دهند، اینها همه بردار ویژه و مقدار ویژه‌های $T \otimes S$ هستند.

این نتیجه را از روش دیگری نیز می‌توان بدست آورد:

$$\begin{aligned}
T \otimes S &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j |w_j\rangle\langle w_j|\right) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j |v_i\rangle\langle v_i| \otimes |w_j\rangle\langle w_j| \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle)(\langle v_i| \otimes \langle w_j|).
\end{aligned}$$

پس $(|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle)$ ها یک پایه متعامد یکه هستند، و مقادیر ویژه هم $\lambda_i \mu_j$ است.

که در مرحله آخر از رابطه‌ی

$$|v_i\rangle\langle v_i| \otimes |w_j\rangle\langle w_j| = (|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle)(\langle v_i| \otimes \langle w_j|)$$

استفاده کردیم که باید آن را بپذیرید. ما مبنای ریاضی دقیق مفهوم بردار $|v\rangle$ را نگفته‌ایم. به همین دلیل رابطه بالا را نمی‌توانیم دقیقا ثابت کنیم. اما اگر آن کت و برا را بصورت برداری ستونی از اعداد بگیرید تحقیق رابطه بالا آسان است. همچنین می‌توانید آن را نوعی نمادگذاری در نظر بگیرید. $\square$

نتیجه قضیه این است که اگر T و S قطری شدنی باشند، آنگاه $T \otimes S$ نیز قطری شدنی است. جهت بررسی قطری شدن یک عملگر (در یک پایه متعامد یکه) میتوانیم از قضایایی که قبلا ذکر شد استفاده کنیم. مثلا ضرب تانسوری دو عملگر نرمال در پایه متعامد یکه قطری میشود، چون خودش نرمال است و الی آخر.

تمرین ۶ ثابت کنید اگر $T \geq 0$ و $S \geq 0$ آنوقت $T \otimes S \geq 0$.

۵.۱ یک مثال

فضای برداری دو بعدی $\mathcal{V}$ را با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ در نظر بگیرید. هر بردار $|v\rangle \in \mathcal{V}$ را می‌توان برحسب ترکیب خطی $|0\rangle, |1\rangle$ نوشت: $|v\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. معادلاً بردار $|v\rangle$ را می‌توان در پایه بالا به صورت یک بردار ستونی در نظر گرفت

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

حال تبدیلات خطی $X, Z : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{aligned}
X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle, \\
Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.
\end{aligned}$$

اثر X و Z روی بردارهای پایه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
X|0\rangle &= |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle, \\
Z|0\rangle &= |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle.
\end{aligned}$$

در نتیجه نمایش ماتریسی آنها در این پایه را بدست می‌آوریم

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که X و Z هر دو هرمیتی هستند (چون ترانهاده مزدوج ماتریس آنها در یک پایه‌ی متعامد یکه خودشان است). از هرمیتی بودن نتیجه می‌گیریم که هرکدام به تنهایی در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری شدنی هستند و همچنین مقادیر ویژه‌ی آنها حقیقی هستند. Z در پایه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ قطری است. لذا بردارهای ویژه‌ی Z همان $|0\rangle, |1\rangle$ هستند با مقادیر ویژه‌ی $+1, -1$. به عبارت دیگر داریم $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.

برای قطری کردن X بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

توجه کنید که $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است. عملگر تبدیل پایه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ به $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H|0\rangle = |+\rangle, \qquad H|1\rangle = |-\rangle,$$

و نمایش ماتریسی H در پایه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

از آنجا که H یک پایه‌ی متعامد یکه را به یک پایه‌ی متعامد یکه می‌فرستد، حافظ ضرب داخلی است. پس H یکانی است. در واقع از نمایش ماتریسی H مشخص است که $H^\dagger = H$ و داریم $HH^\dagger = H^2 = I$.

حال از تعریف X داریم $X|+\rangle = |+\rangle$ و $X|-\rangle = -|-\rangle$. پس مقادیر ویژه‌ی X هم $+1, -1$ هستند و داریم $X = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$. همچنین توجه کنید چون مقادیر ویژه‌ی X و Z برابرند و H بردار ویژه‌های Z را به بردار ویژه‌های X می‌برد داریم $H^\dagger Z H = X$. این رابطه با ضرب ماتریسی نیز قابل بررسی است.

نکته‌ی دیگری که در مورد عملگرهای X, Z قابل توجه است این است که آنها یکانی نیز هستند. قبلاً دیدیم که آنها هرمیتی و در نتیجه نرمال هستند. از طرف دیگر مقادیر ویژه‌ی آنها ± 1 است، یعنی اعدادی با نرم واحد. یک عملگر نرمال که نرم همه مقادیر ویژه‌ی آن یک باشد، یکانی است. در واقع داریم

$$XX^\dagger = X^2 = I, \qquad ZZ^\dagger = Z^2 = I.$$

به عنوان آخرین نکته در این بخش توجه کنید که

$$ZX = -ZX.$$

پس X ، Z جابجا نمی‌شوند و به همین دلیل نمی‌توان آنها را در یک پایه قطری کرد.

حال می‌خواهیم اثر تبدلات X, Z را بر روی فضای تانسوری در نظر بگیریم. فضای ضرب تانسوری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ با پایه‌ی متعامد یکه (و مرتب) زیر مشخص می‌شود

$$E = \{|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}.$$

عملگرهای $S = X\otimes X$ و $T = Z\otimes Z$ دو عضو از $\mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{V})$ هستند. از آنجا که مقادیر ویژه‌ی X, Z برابرند با ± 1 ، مقادیر ویژه‌ی S, T برابرند با $\{\lambda\mu : \lambda, \mu \in \{+1, -1\}\} = \{+1, -1\}$. یعنی مقادیر ویژه‌ی S, T نیز $+1, -1$ هستند هر کدام با تکرر 2.

همچنین از آنجا که X و Z به ترتیب در پایه‌های $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ و $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ قطری شدنی هستند، S و T در پایه‌های E' و E قطری می‌شوند که

$$E' = \{|+\rangle|+\rangle, |+\rangle|-\rangle, |-\rangle|+\rangle, |-\rangle|-\rangle\} = \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}.$$

ماتریس تبدیل پایه‌ی E به E' برابر است با $H\otimes H$ و داریم $S = (H^\dagger\otimes H^\dagger)T(H\otimes H)$.

برخلاف X, Z عملگرهای $X\otimes X, Z\otimes Z$ با هم جابجا می‌شوند:

$$\begin{aligned} TS &= (Z\otimes Z)(X\otimes X) = (ZX)\otimes(ZX) = (-XZ)\otimes(-XZ) \\ &= -(-(XZ\otimes XZ)) = XZ\otimes XZ = (X\otimes X)(Z\otimes Z) = ST. \end{aligned}$$

در نتیجه S, T در یک پایه‌ی متعامد یکه هم زمان قطری شدنی هستند. در واقع گرچه این دو عملگر در پایه‌های E, E' قطری می‌شوند، ولی از آنجایی که مقادیر ویژه‌ی آنها تکرر دارد، این پایه‌ها تنها پایه‌هایی نیستند که S, T را قطری می‌کنند.

بردارهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که این بردارها پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ تشکیل می‌دهند:

$$F = \{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}.$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} &S|\Phi^+\rangle = |\Phi^+\rangle, \quad S|\Phi^-\rangle = -|\Phi^-\rangle, \quad S|\Psi^+\rangle = |\Psi^+\rangle, \quad S|\Psi^-\rangle = -|\Psi^-\rangle, \\ &T|\Phi^+\rangle = |\Phi^+\rangle, \quad T|\Phi^-\rangle = |\Phi^-\rangle, \quad T|\Psi^+\rangle = -|\Psi^+\rangle, \quad T|\Psi^-\rangle = -|\Psi^-\rangle. \end{aligned}$$

بنابراین S, T هر دو در پایه‌ی F قطری هستند.

۶.۱ یک پایه برای فضای عملگرها از فضای تانسوری به خودش

اگر چه هر عملگر در فضای تانسوری به شکل $T \otimes S$ نیست، از ترکیب خطی این گونه عملگرها هر عملگر دلخواهی بدست می‌آید. قبل از بیان قضیه بیاد آورید که برای هر پایه متعامد یکه دلخواه $\{|v_i\rangle\}$ عملگرهای ساده $|v_i\rangle\langle v_k|$ یک پایه برای فضای $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ تشکیل می‌دهند

قضیه ۷ برای هر پایه متعامد یکه دلخواه $\{|v_i\rangle\}$ از $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ هر پایه متعامد یکه دلخواه $\{|w_i\rangle\}$ از $\mathbf{L}(\mathcal{W})$ ، عملگرهای

$$|v_i\rangle\langle v_k| \otimes |w_j\rangle\langle w_l|$$

یک پایه برای $\mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ هستند.

اثبات: در اینجا دو اثبات ذکر میکنیم که تقریبا معادل هم هستند، اما به دو شکل مختلف بیان شده اند.

دیدیم که اگر $\{|v_i\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{V}$ تشکیل دهد، آنوقت $|v_i\rangle\langle v_j|$ یک پایه برای $L(\mathcal{V})$ است. مشابها اگر $\{|w_k\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{W}$ تشکیل دهد، آنوقت $|w_k\rangle\langle w_l|$ یک پایه برای $L(\mathcal{W})$ است. چون $\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ است، پس

$$\{\big(|v_i\rangle \otimes |w_k\rangle\big)\big(\langle v_j| \otimes \langle w_l|\big)\}$$

یا

$$\{|v_i\rangle\langle v_j| \otimes |w_k\rangle\langle w_l|\}$$

یک پایه متعامد یکه برای فضای $L(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ تشکیل می‌دهند. اثبات کامل است.

اما اثبات دوم مشابه حالت تک فضایی است. ابتدا رابطه زیر را ثابت میکنیم:

$$I_{\mathcal{V}} \otimes I_{\mathcal{W}} = \Big(\sum_i |v_i\rangle\langle v_i|\Big) \otimes \Big(\sum_j |w_j\rangle\langle w_j|\Big) = \sum_{ij} |v_i\rangle\langle v_i| \otimes |w_j\rangle\langle w_j|$$

دقت کنید که گذاشتن علامت ضرب تانسوری در میان رابطه بالا مهم است چون ممکن است که به اشتباه آن را ضرب داخلی $\langle v_i|w_j\rangle$ تفسیر کنیم.

برای عملگر دلخواه

$$\Gamma \in \mathbf{L}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}, \mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$$

داریم

$$\begin{aligned}
\Gamma &= (I_{\mathcal{V}} \otimes I_{\mathcal{W}})\Gamma(I_{\mathcal{V}} \otimes I_{\mathcal{W}}) \\
&= \Bigg(\sum_{ij} |v_i\rangle\langle v_i| \otimes |w_j\rangle\langle w_j|\Bigg)\Gamma\Bigg(\sum_{kl} |v_k\rangle\langle v_k| \otimes |w_l\rangle\langle w_l|\Bigg) \\
&= \sum_{ijkl}\Bigg(|v_i\rangle\langle v_i| \otimes |w_j\rangle\langle w_j|\Bigg)\Gamma\Bigg(|v_k\rangle\langle v_k| \otimes |w_l\rangle\langle w_l|\Bigg) \\
&= \sum_{ijkl}(|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle)(\langle v_i| \otimes \langle w_j|)\Gamma(|v_k\rangle \otimes |w_l\rangle)(\langle v_k| \otimes \langle w_l|)
\end{aligned}$$

عبارت $(\langle v_i| \otimes \langle w_j|)\Gamma(|v_k\rangle \otimes |w_l\rangle)$ یک عدد است که آن را میتوان γ_{ijkl} نامید. پس

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \sum_{ijkl}\gamma_{ijkl}(|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle)(\langle v_k| \otimes \langle w_l|) \\
&= \sum_{ijkl}\gamma_{ijkl}\big(|v_i\rangle\langle v_k| \otimes |w_j\rangle\langle w_l|\big).
\end{aligned}$$

پس Γ به صورت ترکیب خطی این عملگرهای قابل بیان است. با مقایسه‌ی تعداد این عملگرها و بعد فضای $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$ نتیجه استقلال خطی این عملگرها را نیز نتیجه می‌گیریم.

$\square$

۲ تجزیه اشمیت

فرض کنید $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle\}$ پایه‌هایی متعامد یکه برای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ باشند. در حالت کلی یک بردار در فضای ضرب تانسوری $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ به صورت $\sum_{i,j} x_{ij}|v_i\rangle|w_j\rangle$ است و برای بیان آن به mn عدد x_{ij} نیاز داریم. تجزیه اشمیت [1] روشی برای نمایش چنین برداری است به طوری که تعداد زیادی از ضرایب x_{ij} صفر باشند.

قضیه ۸ (تجزیه اشمیت) برای هر بردار دلخواه $|\Phi\rangle \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ پایه‌های متعامد یکه‌ی $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots |v_n\rangle$ در $\mathcal{V}$ و $|w_1\rangle, |w_2\rangle, \cdots |w_m\rangle$ در $\mathcal{W}$ و همچنین اعداد نامنفی d_i وجود دارند به طوری که

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} d_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle$$

بعلاوه مقادیر d_i در هر نوع تجزیه از این دست یکتا هستند.

با توجه به یکتایی اعداد d_i در تجزیه‌ی فوق، آنها ضرایب اشمیت بردار $|\Phi\rangle$ می‌نامند.

اثبات: برای راحتی قضیه را در حالی که $m = n$ ثابت می‌کنیم. اثبات حالت کلی مشابه است.

[1] Schmidt decomposition

یک پایه‌ی متعامد یکه‌ی دلخواه $|e_i\rangle$ برای $\mathcal{V}$ و یک پایه متعامد یکه‌ی دلخواه $|f_j\rangle$ برای $\mathcal{W}$ در نظر بگیرید. هر بردار در فضای تانسوری را می‌توان بشکل

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$$

نوشت. ماتریس A با سایز $n \times n$ را در نظر بگیرید که درایه‌ی (i,j) آن a_{ij} باشد. طبق قضیه‌ی تجزیه‌ی مقادیر تکین ماتریس‌های یکانی X, Y و ماتریس قطری D با درایه‌های روی قطر d_i وجود دارند به طوری که $A = XDY$. درایه‌های X را x_{ij} و درایه‌های Y را با y_{ij} نشان دهید. تعریف کنید

$$|v_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}|e_i\rangle.$$

از آنجا که X^T یکانی است، $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است. همچنین تعریف کنید

$$|w_l\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_{lj}|f_j\rangle.$$

از آنجا که Y یکانی است، $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_n\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است.

با توجه به قطری بودن D رابطه‌ی $A = XDY$ معادل است با

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} d_k y_{kj}.$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} d_k y_{kj}|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}|e_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} y_{kj}|f_j\rangle\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k |v_k\rangle \otimes |w_k\rangle.
\end{aligned}$$

حال به اثبات یکتایی می‌پردازیم. فرض کنید که $|\Phi\rangle$ تجزیه‌ی اشمیت دیگری مانند $|\Phi\rangle = \sum_i \lambda_i |v_i'\rangle|w_i\rangle$ داشته باشد که $\lambda_i \geq 0$ و $\{|v_1'\rangle, \ldots, |v_n'\rangle\}$ و $\{|w_1'\rangle, \ldots, |w_n'\rangle\}$ پایه‌های متعامد یکه باشند. فرض کنید R و S ماتریس‌های تبدیل دو پایه باشند:

$$|v_i'\rangle = \sum_{l=1}^{n} r_{il}|v_l\rangle, \qquad |w_i'\rangle = \sum_{l=1}^{n} s_{il}|w_l\rangle.$$

در این صورت R, S یکانی هستند. حال با نوشتن $|\Phi\rangle = \sum_i \lambda_i |v'_i\rangle|w'_i\rangle$ در پایه‌های قبلی داریم

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{l=1}^{n} r_{il}|v_l\rangle\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} s_{ik}|w_k\rangle\right)$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_{il} s_{ik}\right) |v_l\rangle \otimes |w_k\rangle.$$

با مقایسه‌ی این رابطه با $|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^{n} d_k |v_k\rangle \otimes |w_k\rangle$ و استفاده از این که $|v_k\rangle|w_l\rangle$-ها یک پایه تشکیل می‌دهند خواهیم داشت $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_{il} s_{ik} = 0$ اگر $k \neq l$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_{ik} s_{ik} = d_k$. به طور معادل داریم $R^T \Lambda S = D$ که در آن Λ ماتریسی قطری است با درایه‌های λ_i روی قطر. در نتیجه مقادیر ویژه‌ی

$$D^2 = D^\dagger D = S^\dagger \Lambda^2 S$$

از یک طرف برابر d_i^2-ها و از طرف دیگر برابر λ_i^2-ها هستند (توجه کنید که S یکانی است). پس مجموعه‌ی d_i-ها برابر مجموعه‌ی λ_i-ها است.

$\square$

مثال ۹ فرض کنید $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای دو بعدی $\mathcal{V}$ باشد. تعریف کنید

$$|w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle + |v_2\rangle), \quad |w_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle - |v_2\rangle).$$

در این صورت $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle\}$ نیز یک پایه‌ی متعامد یکه است و داریم

$$|v_1\rangle \otimes |v_1\rangle + |v_2\rangle \otimes |v_2\rangle = |w_1\rangle \otimes |w_1\rangle + |w_2\rangle \otimes |w_2\rangle.$$

در نتیجه بردار $|\Phi\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_1\rangle + |v_2\rangle \otimes |v_2\rangle$ دارای دو تجزیه‌ی اشمیت متفاوت است. ولی ضرایب اشمیت در هر دوی این تجزیه‌ها برابر $d_1 = d_2 = 1$ هستند. پس اگر چه پایه‌های متعامد یکه در تجزیه‌ی اشتمیت یکتا نیستند ولی ضرایب اشمیت به طور یکتا تعیین می‌شوند.

برای یک بردار $|\Phi\rangle \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ تعداد ضرایب ناصفر d_i در تجزیه‌ی اشمیت آن را «عدد اشمیت»[۲] آن بردار می‌گویند. توجه کنید که Φ به صورت $|v\rangle|w\rangle$ قابل نوشتن است اگر و فقط اگر عدد اشمیت آن یک باشد. همچنین عدد اشمیت $|\Phi\rangle$ حداکثر برابر $\min\{\dim \mathcal{V}, \dim \mathcal{W}\}$ است.

[۲] Schmidt number