نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱
مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

# جلسه ۷

---

فرض کنید که دو فضای برداری مجزا از هم $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ داریم. این دو فضای برداری را به روش‌های مختلف می‌توان با هم ترکیب کرد و یک فضای برداری بزرگتر ساخت. در این جلسه به دو روش خاص ترکیب دو فضای برداری به نام‌های جمع مستقیم و ضرب تانسوری می‌پردازیم.

## ۱ جمع مستقیم دو فضای برداری

در این روش ما بردارهای دو فضا را پشت سر هم قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر برای هر $|v\rangle \in \mathcal{V}$ و $|w\rangle \in \mathcal{W}$ ما برداری به صورت زوج مرتب $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ تشکیل داده و جمع برداری و ضرب اسکالر را روی آن بصورت مولفه به مولفه تعریف می‌کنیم.

$$\big[|v_1\rangle, |w_1\rangle\big] + \big[|v_2\rangle, |w_2\rangle\big] = \big[|v_1\rangle + |v_2\rangle, |w_1\rangle + |w_2\rangle\big]$$

$$\alpha\big[|v_1\rangle, |w_1\rangle\big] = \big[\alpha|v_1\rangle, \alpha|w_1\rangle\big]$$

دلیل اینکه از نماد [ , ] برای تعریف زوج مرتب استفاده کردیم این است که با نماد ما برای ضرب داخلی اشتباه نشود.

فضای برداری جدید را جمع مستقیم[۱] $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ خوانده و آن را با $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که بردار صفر در فضای جمع مستقیم برابر $[0, 0]$ است که معمولا با همان $0$ نمایش داده می‌شود.

در صورتی که دو فضای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ مجهز به ضرب داخلی‌های $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}}$ و $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{W}}$ باشند، ضرب داخلی میان دو بردار $\big[|v\rangle_1, |w\rangle_1\big]$ و $\big[|v\rangle_2, |w\rangle_2\big]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Big(\big[|v_1\rangle, |w_1\rangle\big],\quad \big[|v_2\rangle, |w_2\rangle\big]\Big)_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}} = \big(|v_1\rangle, |v_2\rangle\big)_{\mathcal{V}} + \big(|w_1\rangle, |w_2\rangle\big)_{\mathcal{W}}.$$

برای مثال جمع مستقیم فضای برداری $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}^m$ معادل فضای برداری $\mathbb{C}^{n+m}$ است. زیرا هر بردار در فضای $\mathbb{C}^n$ را می‌توان با $n$ عدد مختلط نمایش داد و هر بردار در فضای $\mathbb{C}^m$ را با $m$ عدد مختلط. پس از کنار هم قرار دادن آنها برداری $n+m$ تایی بدست می آید. قضیه‌ی زیر شهود حاصل از این مثال را دقیق‌تر بیان می‌کند.

**قضیه ۱** بعد فضای برداری $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ برابر جمع ابعاد $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ می‌باشد $\dim \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}$ . به علاوه اگر

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle\} \tag{۱}$$

---
[۱] Direct sum

یک پایه برای فضای $\mathcal{V}$ و

$$\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, \cdots, |w_m\rangle\} \tag{۲}$$

یک پایه برای فضای $\mathcal{W}$ باشد، آنگاه

$$\Big\{\big[|v_1\rangle, 0\big], \big[|v_2\rangle, 0\big], \cdots, \big[|v_n\rangle, 0\big], \big[0, |w_1\rangle\big], \big[0, |w_2\rangle\big], \cdots, \big[0, |w_m\rangle\big]\Big\} \tag{۳}$$

یک پایه برای فضای $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ خواهد بود. همچنین اگر پایه‌های انتخابی دو فضا متعامد یکه باشند، پایه‌ی تولیدی برای فضای $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ نیز متعامد یکه خواهد بود. به علاوه نمایش مختصاتی $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ در پایه‌ی معرفی شده معادل چسباندن نمایش مختصاتی $|v\rangle$ و $|w\rangle$ در پایه‌های $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ است.

**اثبات:** هر بردار $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ را می‌توان به شکل

$$\big[|v\rangle, |w\rangle\big] = \big[|v\rangle, 0\big] + \big[0, |w\rangle\big]$$

نوشت. بردار $\big[|v\rangle, 0\big]$ را می‌توان بر حسب ترکیب خطی

$$\big[|v_1\rangle, 0\big], \big[|v_2\rangle, 0\big], \cdots, \big[|v_n\rangle, 0\big],$$

و بردار $\big[0, |w\rangle\big]$ را می‌توان بر حسب ترکیب خطی بردارهای

$$\big[0, |w_1\rangle\big], \big[0, |w_2\rangle\big], \cdots, \big[0, |w_m\rangle\big]$$

نوشت. پس بردارهای معرفی شده کل فضای جمع مستقیم را پوشش می‌دهند. در نتیجه کافی است نشان دهیم آنها مستقل خطی نیز هستند. اگر

$$\alpha_1\big[|v_1\rangle, 0\big] + \alpha_2\big[|v_2\rangle, 0\big] + \cdots + \alpha_n\big[|v_n\rangle, 0\big] +$$

$$+\beta_1\big[0, |w_1\rangle\big] + \beta_2\big[0, |w_2\rangle\big] + \cdots + \beta_m\big[0, |w_m\rangle\big] = 0$$

نتیجه می‌گیریم

$$\big[\sum_i \alpha_i |v_i\rangle, \sum_j \beta_j |w_j\rangle\big] = 0 = \big[0, 0\big].$$

بنابراین

$$\sum_i \alpha_i |v_i\rangle = 0, \quad \sum_j \beta_j |w_j\rangle = 0.$$

از آنجا که $|v_i\rangle$-ها و $|w_j\rangle$-ها هر یک مستقل خطی بودند داریم $\alpha_i = \beta_j = 0$ برای هر $i, j$. پس بعد فضای $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ برابر تعداد اعضای پایه یا $m + n$ خواهد بود.

از تساوی‌های فوق واضح است که اگر نمایش بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ در پایه‌های فوق به ترتیب برابر

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}, \tag{۴}$$

باشد، آنگاه نمایش $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ در پایه‌ی (۳) برابر

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

است. $\square$

## ۱.۱ جمع مستقیم دو عملگر خطی

فرض کنید که $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ و $S : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ دو عملگر خطی باشند. در این صورت جمع مستقیم آنها که با نماد $T \oplus S$ نشان داده می‌شود، عملگری در فضای مجموع است و به این صورت تعریف می‌شود که عملگرهای $T$ و $S$ را به صورت مجزا روی بخش‌ها اول و دوم زوج مرتب $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ اعمال می‌کنیم:

$$(T \oplus S)\big[|v\rangle, |w\rangle\big] = \big[T|v\rangle, S|w\rangle\big].$$

به راحتی قابل بررسی است که $T \oplus S : \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \to \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ عملگری خطی است.

طبق تعریف اگر ماتریس نمایش $T$ در پایه‌ی (۱) برابر $A$ و ماتریس نمایش $S$ در پایه‌ی (۲) برابر $B$ باشد آنگاه نمایش مختصاتی $(T \oplus S)\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ در پایه‌ی (۳) برابر است با

$$\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \\ \\ B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

که در آن نمایش مختصاتی $|v\rangle$ و $|w\rangle$ بردارهای (۴) هستند.

برای دو ماتریس $A$ و $B$ جمع مستقیم آنها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n\times m} \\ \hline 0_{m\times n} & B \end{array}\right)$$

که ماتریسی $(n+m)\times(n+m)$ است. اگر این ماتریس را در بردار مختصاتی $\big[|v\rangle, |w\rangle\big]$ ضرب کنیم داریم

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n\times m} \\ \hline 0_{m\times n} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \\ B\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه ماتریس نمایش $T\oplus S$ در پایه‌ی (۳) برابر $A\oplus B$ است.

**مثال ۲**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2 \\ 3 & 4+\mathbf{i} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2+4\mathbf{i} \\ 6 & 7 & \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4+\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 2+4\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 6 & 7 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

دقت کنید که عملگرهایی که می‌توان روی فضای $\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$ تعریف کرد متناظر با ماتریس های دلخواه $(m+n)\times(m+n)$ هستند و لزوما قطری بلوکی نیستند. لذا یک عملگر دلخواه در فضای $\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$ لزوما قابل نوشتن بصورت جمع مستقیم عملگرهای روی فضاهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ نیست.

**لم ۳**

$$\det(A\oplus B) = \det(A)\det(B)$$

$$tr(A\oplus B) = tr(A) + tr(B)$$

اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

**قضیه ۴** در مورد عملگرهای دلخواه $T_1$ و $T_2$ روی فضای $\mathcal{V}$ و $S_1$ و $S_2$ روی فضای $\mathcal{W}$ داریم

$$(T_1\oplus S_1)(T_2\oplus S_2) = T_1T_2\oplus S_1S_2$$

مشابها در مورد ماتریس ها داریم

$$(A_1\oplus B_1)(A_2\oplus B_2) = A_1A_2\oplus B_1B_2$$

**اثبات:**

$$\begin{aligned} (T_1\oplus S_1)(T_2\oplus S_2)\big[|v\rangle, |w\rangle\big] &= (T_1\oplus S_1)\big[T_2|v\rangle, S_2|w\rangle\big] \\ &= \big[T_1T_2|v\rangle, S_1S_2|w\rangle\big]. \end{aligned}$$

در نتیجه $(T_1 \oplus S_1)(T_2 \oplus S_2) = T_1T_2 \oplus S_1S_2$. از این رابطه می‌توان رابطه ماتریسی را نتیجه گرفت. اما بصورت مستقیم هم می‌توان این رابطه را ثابت کرد:

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{n\times m} \\ \hline 0_{m\times n} & B_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0_{n\times m} \\ \hline 0_{m\times n} & B_2 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_1A_2 & 0_{n\times m} \\ \hline 0_{m\times n} & B_1B_2 \end{array}\right) \\ &= A_1A_2 \oplus B_1B_2\end{aligned}$$

$\square$

توجه کنید که به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$T_1 \oplus S_1 + T_2 \oplus S_2 = (T_1 + T_2) \oplus (S_1 + S_2).$$

**تمرین ۵** تعریف کنید $P_1 : \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \to \mathcal{V}$

$$P_1\big[|v\rangle, |w\rangle\big] = |v\rangle.$$

نشان دهید $P_1$ خطی است و ماتریس نمایش آن و $kerP_1$ را بدست بیاورید.

**تمرین ۶** تعریف کنید $J_1 : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$

$$J_1|v\rangle = \big[|v\rangle, 0\big].$$

نشان دهید $J_1$ خطی است و ماتریس نمایش آن و $kerJ_1$ را بدست بیاورید. همچنین نشان دهید $J_1$ حافظ ضرب داخلی است.

**تمرین ۷** تعریف کنید $S : \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \to \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ که

$$S\big[|v\rangle, |v'\rangle\big] = \big[|v'\rangle, |v\rangle\big].$$

پایه‌ای برای $\mathcal{V}$ مشخص و ماتریس نمایش $S$ را در پایه‌ی متناظر برای فضای $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ بدست بیاورید.

**تمرین ۸** نشان دهید که مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی $T \oplus S$ از اجتماع مقادیر ویژه‌ی $T$ و $S$ بدست می‌آید. همچنین بردارهای ویژه‌ی $T \oplus S$ را بر حسب بردارهای ویژه‌ی $T$ و $S$ بیابید.

**تمرین ۹** نشان دهید $S \oplus T$ یکانی است اگر و فقط اگر $S$ و $T$ هر دو یکانی باشند. این گزاره را برای عملگرهای هرمیتی، نرمال و مثبت نیمه معین نیز ثابت کنید.

## ۲ ضرب تانسوری دو فضای برداری

ضرب تانسوری دو فضای برداری روش دیگری برای ساختن یک فضای برداری جدید از روی دو فضای برداری مجزا از هم $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ می‌باشد. جهت انگیزه دادن به تعریف ضرب تانسوری دو فضا، با دو مثال شروع می‌کنیم.

### ۱.۲ مقدمه: استفاده از چندجمله ای ها

$\mathcal{V} = \mathbb{C}^3$ یک فضای برداری سه بعدی و $\mathcal{W} = \mathbb{C}^2$ یک فضای برداری دو بعدی روی اعداد مختلط هستند. هر بردار $|v\rangle \in \mathbb{C}^3$ را می‌توان بصورت مختصاتی با سه عدد مختلط نشان داد:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

مشابها هر بردار $|w\rangle \in \mathbb{C}^2$ را می‌توان بصورت مختصاتی با دو عدد مختلط نشان داد:

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

اما یک راه دیگر نمایش دادن این بردارها استفاده از چندجمله‌ای‌ها است. مثلا بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را می‌توان با چندجمله‌ای‌های زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} |v\rangle &\mapsto \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \\ |w\rangle &\mapsto \beta_1 y + \beta_2 y^2 \end{aligned}$$

در واقع این نمایش‌ها معادلند و تنها کاری که کرده‌ایم این است که تناظر زیر را در نظر گرفته‌ایم

$$|v_1\rangle \mapsto x, \quad |v_2\rangle \mapsto x^2, \quad |v_3\rangle \mapsto x^3,$$

$$|w_1\rangle \mapsto y, \quad |w_2\rangle \mapsto y^2.$$

این تناظر از آنجا حایز اهمیت است که گاهی کار با چندجمله‌ای‌ها برای ما آسان‌تر است.

در این صورت اگر چندجمله‌ای مربوط به دو بردار را با هم جمع کنیم به یک چندجمله‌ای جدید می‌رسیم که می‌تواند متناظر با جمع مستقیم دو بردار در نظر گرفته شود:

$$\big[|v\rangle, |w\rangle\big] \mapsto \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta_1 y + \beta_2 y^2$$

در این چندجمله‌ای اگر ضرایب $(x, x^2, x^3, y, y^2)$ را زیر هم بنویسیم به نمایش جمع مستقیم دو بردار می‌رسیم.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

حال فرض کنید که دو چندجمله‌ای را در هم ضرب کنیم

$$\begin{aligned}(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3)(\beta_1 y+\beta_2 y^2) = {} & \alpha_1\beta_1 xy+\alpha_1\beta_2 xy^2+\\ & \alpha_2\beta_1 x^2y+\alpha_2\beta_2 x^2y^2+\\ & \alpha_3\beta_1 x^3y+\alpha_3\beta_2 x^3y^2\end{aligned}$$

و ضرایب $(xy, xy^2, x^2y, x^2y^2, x^3y, x^3y^2)$ را زیر هم بنویسیم. بردار حاصل برابر خواهد بود با

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_1\beta_2\\ \alpha_2\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\\ \alpha_3\beta_1\\ \alpha_3\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\\ \alpha_2\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\\ \alpha_3\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

این بردار را «ضرب تانسوری»[۲] دو بردار می‌گوییم و با نماد زیر آن را نمایش می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_1\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\\ \alpha_2\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\\ \alpha_3\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_1\beta_2\\ \alpha_2\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\\ \alpha_3\beta_1\\ \alpha_3\beta_2\end{pmatrix}$$

که برداری به طول شش است. توجه کنید که هر چندجمله‌ای $f(x,y)$ لزوما به صورت $g(x)h(y)$ قابل نوشتن نیست.

**مثال ۱۰** هر عضو این فضا لزوما قابل تجزیه بصورت ضرب تانسوری دو عضو نیست. مثلا $xy+x^2y^2$ را نمیتوان بصورت

$$(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3)(\beta_1 y+\beta_2 y^2)$$

نوشت زیرا اگر چنین کاری ممکن بود

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_1=1, \alpha_2\beta_2=1 &\Rightarrow \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2=1\\ &\Rightarrow (\alpha_1\beta_2)(\alpha_2\beta_1)=1\\ &\Rightarrow 0\times 0=1\end{aligned}$$

به همین ترتیب هر بردار با شش مولفه را نمی‌توان به صورت ضرب تانسوری دو بردار نوشت. با این حال بردارهای پایه همگی فرم فوق را دارند.

[۲] Tensor product

**مثال ۱۱** فرض کنید

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

در این صورت ضرب تانسوری این دو بردار برابر

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

خواهد بود. در صورتی که

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

ضرب تانسوری برابر

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

است.

اما این بردارهای ضرب تانسوری در چه فضای برداری‌ای قرار می‌گیرند؟ برداری که در بالا ساختیم شش مولفه دارد و تمامی شش برداری که فقط یک مولفه‌ی ناصفر یک دارند بصورت ضرب تانسوری دو بردار قابل نوشتن هستند. از طرف دیگر یک فضای برداری نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است. پس اگر تمامی بردارهایی که فقط یک مولفه‌ی ناصفر یک دارند را داخل یک فضا قرار دهیم، باید تمامی بردارهای دلخواه شش تایی را نیز داخل آن فضای برداری قرار دهیم.

تاکید می‌کنیم که که هر بردار شش تایی لزوما به صورت ضرب تانسوری دو بردار نیست ولی با توجه به بسته بودن یک فضای برداری نسبت به جمع برداری و این که بردارهای پایه فرم ضرب تانسوری را دارند، برای تشکیل یک فضای برداری مجبوریم همه‌ی شش‌تایی‌ها را لحاظ کنیم.

**مثال ۱۲** اگر ضرب تانسوری دو بردار صفر شود حتما یکی از آنها صفر است زیرا ضرب تانسوری متناظر با ضرب چندجمله‌ای‌ها است و داریم

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)(\beta_1 y + \beta_2 y^2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \ \ or \ \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

**مثال ۱۳** ضرب تانسوری دو بردار دارای این خاصیت است که برای هر دو بردار دلخواه $|v\rangle$ و $|w\rangle$ داریم

$$|v\rangle \otimes 0 = 0 \otimes |w\rangle = 0.$$

زیرا

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)(0y + 0y^2) = (0x + 0x^2 + 0x^3)(\beta_1 y + \beta_2 y^2) = 0$$

**مثال ۱۴** ضرب تانسوری دو بردار دارای این خاصیت است که

$$(\theta |v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (\theta |w\rangle)$$

زیرا

$$\Big(\theta(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\Big)(\beta_1 y + \beta_2 y^2) = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\Big(\theta(\beta_1 y + \beta_2 y^2)\Big)$$

**مثال ۱۵** ضرب تانسوری دو بردار دارای این خاصیت است که

$$|v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w'\rangle = |v\rangle \otimes (|w\rangle + |w'\rangle)$$

زیرا

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)(\beta_1 y + \beta_2 y^2) + (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)(\beta'_1 y + \beta'_2 y^2)\\ &= (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\left((\beta_1 + \beta'_1)y + (\beta_2 + \beta'_2)y^2\right).\end{aligned}$$

بعدها خواهیم دید که این خواص در حالت کلی نیز برقرار خواهند بود.

## ۲.۲ مقدمه: استفاده از احتمال

در این بخش فضای ضرب تانسوری را از زاویه متفاوتی مورد بحث قرار می‌دهیم. در درس احتمال برای هر پدیده تصادفی یک فضای نمونه تعریف می‌کردیم. مثلا فضای نمونه پرتاب یک سکه $\Omega_1 = \{A, B\}$ بود، و فضای پرتاب یک تاس $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بود. در ضمن برای هر فضای نمونه یک بردار از احتمالات نیز داریم که بسته به اینکه سکه و تاس سالم باشند یا خیر بردار احتمالات می‌تواند تغییر کند. در اینجا بردار احتمالات

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{pmatrix}$$

بترتیب در فضای دو بعدی و شش بعدی قرار می‌گیرند؛ اما مولفه های این دو بردار دلخواه نیستد؛ آنها نامنفی هستند و جمعشان برابر یک است. اما به هر حال می‌توان به آنها به عنوان بردار نگاه کرد.

حال فرض کنید که بخواهیم این دو آزمایش تصادفی را با هم ترکیب کنیم. چگونه باید فضای نمونه و احتمالات را تخصیص دهیم؟ چند راه برای ترکیب دو آزمایش وجود دارد. یکی اینکه بصورت تصادفی و هم‌شانس تصمیم بگیریم که یکی از دو آزمایش را انجام دهیم. در این صورت فضای نمونه عبارت خواهد بود از

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \{A, B, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

و البته بردار احتمالات نیز گسترش پیدا کرده و به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_A \\ p_B \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{pmatrix}$$

که اگر ضریب $1/2$ بیرون پرانتز را که یک شدن جمع احتمالات را تضمین می‌کند اغماض کنیم، می‌بینیم که بردار حاصل همان جمع مستقیم دو بردار است. پس مفهوم احتمالاتی جمع مستقیم این است که یکی از دو آزمایش را انتخاب کرده و انجام می‌دهیم؛ در این صورت فضای نمونه جدید اجتماع فضاهای نمونه‌ی قبلی است و تعداد اعضایش جمع تعداد اعضای فضاهای نمونه‌ی قبلی می‌باشد.

اما راه دیگری نیز برای ترکیب دو آزمایش وجود دارد و آن انجام «هم‌زمان» آنها است. در این صورت فضای نمونه حاصل ضرب دو فضای نمونه خواهد بود:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{A, B\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

که $12$ عضو دارد. برای نمایش بردار احتمالات معمولا یک جدول $2 \times 6$ رسم می‌شود و توزیع مشترک دو متغیر در آن ذکر می‌شود. اما این جدول $2 \times 6$ را می‌توان در یک بردار به طول $12$ نیز نشان داد. به این صورت که سطر اول را کنار سطر دوم بنویسیم و همه‌ی درایه‌ها را کنار هم قطار کنیم، و سپس با ترانهاده گرفتن آن را به یک بردار ستونی بزرگ تبدیل کنیم.

$$\begin{pmatrix} p_{A1} & p_{A2} & \cdots & p_{A6} \\ p_{B1} & p_{B2} & \cdots & p_{B6} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_{A1} \\ p_{A2} \\ \vdots \\ p_{A6} \\ p_{B1} \\ p_{B2} \\ \vdots \\ p_{B6} \end{pmatrix}$$

در صورتی که دو آزمایش بصورت «مستقل» از هم انجام شوند خواهیم داشت مثلا $p_{A1} = p_A p_1$. در این صورت

بردار احتمالات بصورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{pmatrix} p_{A1} \\ p_{A2} \\ \vdots \\ p_{A6} \\ p_{B1} \\ p_{B2} \\ \vdots \\ p_{B6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_A p_1 \\ p_A p_2 \\ \vdots \\ p_A p_6 \\ p_B p_1 \\ p_B p_2 \\ \vdots \\ p_B p_6 \end{pmatrix}$$

که برابر است با همان ضرب تانسوری دو بردار اولیه‌ای که داشتیم:

$$\begin{pmatrix} p_A p_1 \\ p_A p_2 \\ \vdots \\ p_A p_6 \\ p_B p_1 \\ p_B p_2 \\ \vdots \\ p_B p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{pmatrix}.$$

می‌بینیم که ضرب تانسوری معنی انجام هم‌زمان دو آزمایش را دارد (و نه انتخاب میان آنها)، اما ممکن است که دو آزمایش بصورت مستقل از هم انجام نشوند، و وابستگی میان آنها باشد. در این صورت بردار احتمالات بصورت ضرب تانسوری نخواهد بود. پس شکل ضرب تانسوری داشتن یا نداشتن یک بردار احتمال به نوعی همبستگی میان انجام دو آزمایش را نشان می‌دهد.

## ۳.۲ تعریف ضرب تانسوری دو فضای برداری

پس از این مقدمه مفصل آماده هستیم که ضرب تانسوری دو فضای برداری را تعریف کنیم.

### ۱.۳.۲ یک حالت خاص

ابتدا تعریف ضرب تانسوری را برای فضاهای برداری $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ و $\mathcal{W} = \mathbb{C}^m$ بیان می‌کنیم و سپس به حالت کلی می‌پردازیم. هر بردار دلخواه در $\mathbb{C}^n$ یک $n$ تایی از اعداد مختلط است:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

و هر بردار $|w\rangle \in \mathbb{C}^m$ یک $m$ تایی از اعداد مختلط است:

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

در بخش قبل ضرب تانسوری دو بردار عددی را تعریف کردیم. حاصل برداری $mn$ عضوی بود که بصورت زیر محاسبه می‌شد:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_1\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_1\beta_m\\ \alpha_2\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_2\beta_m\\ \vdots\\ \alpha_n\beta_m\end{pmatrix}$$

این بردار عضوی از فضای $\mathbb{C}^{mn}$. دقت کنید که ضرب تانسوری $\otimes$ عملگری است که به هر دو بردار دلخواه $|v\rangle$ و $|w\rangle$ در $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ یک بردار در فضای برداری $\mathbb{C}^{mn}$ نسبت می‌دهد:

$$\otimes : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^{mn}$$

که در آن برای سادگی $\otimes(|v\rangle, |w\rangle)$ را با نماد

$$|v\rangle \otimes |w\rangle$$

نشان می‌دهیم. ضرب تانسوری ای که در بالا آمده دارای خواص زیر است:

$$\mathbf{0} \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$(c|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (c|w\rangle) = c(|v\rangle \otimes |w\rangle), \tag{۵}$$

$$|v\rangle \otimes (|w\rangle + |w'\rangle) = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w'\rangle, \tag{۶}$$

$$(|v\rangle + |v'\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle + |v'\rangle \otimes |w\rangle. \tag{۷}$$

جهت درک شهودی اینکه این خواص از کجا آمده اند توجه کنید که برای $n = m = 1$ هر بردار متناظر با یک عدد است و این روابط چیزی جز شرکت‌پذیری عمل ضرب و همچنین توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع نیستند.

**تمرین ۱۶** بررسی کنید که خواص بالا همواره برقرارند.

$|e_i\rangle$ برداری $n$-تایی بگیرید که غیر از مولفه‌ی $i$-ام که یک است، بقیه‌ی مولفه‌های آن صفر هستند و به همین ترتیب بردارهای $m$-تایی $|f_j\rangle$ را تعریف کنید. در این صورت طبق تعریف $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ برداری $mn$-تایی است که فقط یک مولفه‌ی ناصفر دارد. تعداد این بردارها $mn$ است و روی هم پایه‌ی استاندارد $\mathbb{C}^{mn}$ را تشکیل می‌دهند. در واقع از ترکیب خطی بردارهای $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ می‌توان کل فضای $\mathbb{C}^{mn}$ را ساخت. به همین دلیل گاهی فضای برداری $\mathbb{C}^{mn}$ را با $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ نشان می‌دهیم. دلیل این موضوع صرفا تاکید بر نحوه‌ی ساختن بردارهای $mn$-تایی به صورت فوق است.

پس $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ یک فضای برداری یکریخت با $\mathbb{C}^{mn}$ است. همچنین هر بردار $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}^{mn}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی بردارهای به فرم $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت. یعنی بردارهای $|v_i\rangle$ و $|w_i\rangle$ و اعداد $c_i$ وجود دارند که

$$|\Phi\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle.$$

در اینجا توجه به دو نکته ضروری است. اولا اینکه هر بردار $mn$-تایی لزوما به فرم $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نیست و صرفا به صورت ترکیب خطی این بردارها قابل نوشتن است. ثانیا نحوه‌ی نوشتن $|\Phi\rangle$ به صورت این ترکیب خطی یکتا نیست. برای مثال داریم

$$|e_1\rangle \otimes |f_1\rangle + |e_2\rangle \otimes |e_2\rangle = \frac{1}{2}(|e_1\rangle + |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle + |f_2\rangle) + \frac{1}{2}(|e_1\rangle - |e_2\rangle) \otimes (|f_1\rangle - |f_2\rangle).$$

درستی این رابطه به راحتی با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۷) قابل بررسی است. در واقع این سه رابطه خود بیان کننده‌ی این هستند که نحوه‌ی نوشتن $|\Phi\rangle$ بر حسب ترکیب خطی $|v\rangle \otimes |w\rangle$-ها یکتا نیست.

سوالی که ممکن است در اینجا پرسیده شود این است که آیا رابطه‌ی دیگری غیر از روابط (۵)، (۶) و (۷) برای ضرب تانسوری بردارها برقرار است؟ جواب این سوال خیر است؛ هر رابطه‌ی دیگری از ترکیب این سه رابطه بدست می‌آید. برای مثال در حالت $m = n = 1$ شرکت پذیری ضرب و توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع (و همچنین جابجایی عمل ضرب که در اینجا به وضوح برای ضرب تانسوری در حالت کلی برقرار نیست) تنها خواص عمل ضرب اعداد هستند.

دیدیم که بردارهای $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ پایه‌ای برای فضای $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \equiv \mathbb{C}^{mn}$ تشکیل می‌دهند. این خاصیت نه فقط برای این بردارها بلکه برای هر دو پایه برای فضاهای $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}^m$ برقرار است. برای اثبات این موضوع فرض کنید $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathbb{C}^n$ و $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathbb{C}^m$ باشد در اینصورت ادعا می‌کنیم که

$$\begin{aligned}&\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle : \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}\\ &= \{|v_1\rangle \otimes |w_1\rangle, |v_1\rangle \otimes |w_2\rangle, \dots, |v_1\rangle \otimes |w_m\rangle, |v_2\rangle \otimes |w_1\rangle, \dots, |v_2\rangle \otimes |w_m\rangle, \dots, |v_n\rangle \otimes |w_m\rangle\}\end{aligned}$$

یک پایه برای فضای $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ است.

**اثبات:** کافی است نشان دهیم که این بردارها مستقل خطی هستند زیرا در این صورت چون تعداد آنها با بعد فضای $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \equiv \mathbb{C}^{mn}$ یکی است، حتما یک پایه تشکیل خواهند داد. فرض کنید که بردارها وابسته خطی باشد. در این صورت $\{x_{ij}\}$ ناصفری وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle = 0.$$

فرض کنید

$$|v_i\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}$$

در این صورت صفر بودن $m$ مولفه‌ی اول بردار $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$ معادل است با

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\alpha_{i1}|w_j\rangle = 0.$$

یا

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\alpha_{i1}\right)|w_j\rangle = 0.$$

چون بردارهای $|w_j\rangle$ مستقل خطی هستند داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\alpha_{i1} = 0 \qquad \forall j.$$

مشابها با استفاده از $m$ مولفه دوم می‌توان نشان داد

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\alpha_{i2} = 0 \qquad \forall j.$$

با کنار هم قرار دادن همه‌ی این تساوی‌ها بدست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}|v_i\rangle = 0 \qquad \forall j.$$

که اگر از مستقل خطی بودن بردارهای $|v_i\rangle$ استفاده کنیم خواهیم داشت.

$$x_{ij} = 0 \qquad \forall i, j.$$

**تمرین ۱۷** نشان دهید

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

قابل نوشتن به صورت ضرب تانسوری دو بردار $|v\rangle \in \mathbb{C}^3$ و $|w\rangle \in \mathbb{C}^2$ نیست.

**تمرین ۱۸** نشان دهید

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ که در آن $|v\rangle \in \mathbb{C}^3$ و $|w\rangle \in \mathbb{C}^2$ قابل نوشتن است اگر و فقط اگر رتبه‌ی ماتریس زیر حداکثر یک باشد.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

**تمرین ۱۹** یک تناظر یک به یک میان درایه‌های ضرب تانسوری

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

و درایه‌های ماتریس حاصل از ضرب

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix}$$

پیدا کنید.

### ۲.۳.۲ حالت کلی

در قسمت قبل برای فضاهای برداری $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}^m$ ضرب تانسوری را تعریف کردیم و دیدیم که یک فضای $mn$ بعدی است و یکریخت با $\mathbb{C}^{mn}$. در اینجا می‌خواهیم ضرب تانسوری فضاهای برداری را برای هر دو فضای برداری دلخواه $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ در نظر بگیریم. مانند حالت خاص بالا $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ نیز یک فضای برداری خواهد بود و به ازای هر دو بردار $|v\rangle \in \mathcal{V}$ و $|w\rangle \in \mathcal{W}$، $|v\rangle \otimes |w\rangle$ برداری در $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ است

$$\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \tag{۸}$$

و در واقع $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ تشکیل شده از ترکیب خطی بردارهای $|v\rangle \otimes |w\rangle$ است:

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle : \quad \forall k, \forall c_i, \forall |v_i\rangle, \forall |w_i\rangle \right\}.$$

منتهی نکته‌ی مهمی که وجود دارد همانند مثال $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$، نوشتن یک بردار $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ به فرم $\sum_{i=1}^{k} c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle$ یکتا نیست. دلیل این موضوع همانند مثال خاص بالا این است که ما فرض می‌کنیم عملگر ضرب تانسوری در روابط (۵)، (۶) و (۷) صدق می‌کند.

**تعریف ۲۰** $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ یک فضای برداری تشکیل شده از بردارهای فرم $|v\rangle \otimes |w\rangle$ و همه‌ی ترکیب خطی‌های آنها است به طوری که روابط (۵)، (۶) و (۷) برقرارند. به علاوه این سه رابطه تنها رابطه‌های موجود برای ضرب تانسوری هستند.

ممکن است سوال شود که چرا فضای برداری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ سازگار با تعریف فوق وجود دارد؟ واقعیت این است که برای اثبات این موضوع نیاز به ابزارهای جدیدی داریم که در این درس فرصت پرداختن به آنها نیست. ولی نکته در اینجاست که این ابزارهای جدید و اثبات دقیق سازگار بودن تعریف فوق، شهود چندانی به ما در مورد $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ نمی‌دهد. جواب دیگری که می‌توان به سوال فوق داد این است که با گرفتن پایه‌هایی برای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ و نوشتن مختصات هر بردار در این پایه‌ها یکریختی‌هایی بین $\mathcal{V}$ و $\mathbb{C}^n$، و همچنین بین $\mathcal{W}$ و $\mathbb{C}^m$ خواهیم داشت. از آنجا که $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$ به طور دقیق در بالا تعریف شد، فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ نیز قابل تعریف است و خواص (۵)، (۶) و (۷) برای بردارهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ برقرارند.

مطالب فوق در قضیه‌ی زیر خلاصه شده‌اند.

**قضیه ۲۱** برای هر دو فضای برداری $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ فضای ضرب تانسوری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ وجود دارد به طوری که خواص زیر همزمان برقرار باشند:

- برای هر دو بردار $|v\rangle\in\mathcal{V}$ و $|w\rangle\in\mathcal{W}$ بردار $|v\rangle\otimes|w\rangle\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ وجود دارد. همچنین $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ شامل همه‌ی ترکیب خطی‌های بردارهای فوق است.

- برای بردارهای دلخواه $|v\rangle$ و $|v'\rangle$ در $\mathcal{V}$ و بردارهای دلخواه $|w\rangle$ و $|w'\rangle$ در $\mathcal{W}$ داریم

$$(c|v\rangle)\otimes|w\rangle=|v\rangle\otimes(c|w\rangle)=c(|v\rangle\otimes|w\rangle), \tag{۹}$$

$$|v\rangle\otimes(|w\rangle+|w'\rangle)=|v\rangle\otimes|w\rangle+|v\rangle\otimes|w'\rangle, \tag{۱۰}$$

$$(|v\rangle+|v'\rangle)\otimes|w\rangle=|v\rangle\otimes|w\rangle+|v'\rangle\otimes|w\rangle. \tag{۱۱}$$

همچنین هر رابطه‌ی دیگری بین ضرب تانسوری بردارها از این سه رابطه نتیجه می‌شود.

- بعد فضای برداری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ برابر حاصلضرب ابعاد $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ است.

$$\dim\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}=\dim\mathcal{V}\dim\mathcal{W}.$$

بعلاوه در صورتی که $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathcal{V}$ و $\{|w_1\rangle,\dots,|w_m\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathcal{W}$ باشد در اینصورت

$$\begin{aligned}&\{|v_i\rangle\otimes|w_j\rangle:\quad 1\le i\le n, 1\le j\le m\}\\&=\{|v_1\rangle\otimes|w_1\rangle,|v_1\rangle\otimes|w_2\rangle,\dots,|v_1\rangle\otimes|w_m\rangle,|v_2\rangle\otimes|w_1\rangle,\dots,|v_2\rangle\otimes|w_m\rangle,\dots,|v_n\rangle\otimes|w_m\rangle\}\end{aligned}$$

یک پایه برای فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ خواهد بود.

**مثال ۲۲** برای هر $|v\rangle\in\mathcal{V}$ و $|w\rangle\in\mathcal{W}$ بردار صفر فضای برداری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ برابر است با

$$\mathbf{0}\otimes|w\rangle=|v\rangle\otimes\mathbf{0}=\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}.$$

برای اثبات این تساوی کافی است توجه کنیم که طبق (۹)

$$|v\rangle\otimes\mathbf{0}=|v\rangle\otimes(0\cdot\mathbf{0})=0\cdot(|v\rangle\otimes\mathbf{0})=(0\cdot|v\rangle)\otimes\mathbf{0}=\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}.$$

**مثال ۲۳** فرض کنید $\mathcal{V}$ مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های به صورت $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ باشد. در این صورت $\mathcal{V}$ یک فضا برداری سه بعدی است با پایه‌ی $\{x, x^2, x^3\}$. همچنین $\mathcal{W}$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های به فرم $\beta_1 y + \beta_2 y^2$ بگیرید. در اینصورت $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ یک فضای برداری با پایه‌ی $\{x \otimes y, x \otimes y^2, x^2 \otimes y, x^2 \otimes y^2, x^3 \otimes y, x^3 \otimes y^2\}$ و شامل بردارهای به فرم

$$\gamma_1 x \otimes y + \gamma_2 x \otimes y^2 + \gamma_3 x^2 \otimes y + \gamma_4 x^2 \otimes y^2 + \gamma_5 x^3 y + \gamma_6 x^3 \otimes y^2$$

است. در ایجا اگر علامت $\otimes$ را از $x^i \otimes y^j$ حذف کنیم می‌بینیم که $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ همان فضای چندجمله‌ای‌ها است. توجه کنید که روابط (۱۱)، (۱۰) و (۹) به وضوح برای چندجمله‌ای‌ها برقرارند. همچنین توجه کنید که $\dim \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = 6$.

معمولا نماد $\otimes$ در بردار $|v\rangle \otimes |w\rangle$ برای راحتی حذف می‌شود. در اینصورت بردار

$$\sum_{i=1}^{k} c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle$$

را با

$$\sum_{i=1}^{k} c_i |v_i\rangle |w_i\rangle$$

و یا حتی گاهی با $\sum_{i=1}^{k} c_i |v_i, w_i\rangle$ نمایش می‌دهیم.

**مثال ۲۴** می‌خواهیم عملگر $S : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ را به صورت

$$S\left(\sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle\right) = \sum_i c_i |w_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

در نظر بگیریم. برای این کار ابتدا باید نشان دهیم که $S$ خوش‌تعریف است. به این معنا که اگر $|\Phi\rangle \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ را بتوان به دو صورت به فرم

$$|\Phi\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle = \sum_j c'_j |v'_j\rangle \otimes |w'_j\rangle$$

نوشت آنگاه داریم

$$\sum_i c_i |w_i\rangle \otimes |v_i\rangle = \sum_j c'_j |w'_j\rangle \otimes |v'_j\rangle.$$

توجه کنید که گفتیم که روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) تنها برقرار برای ضرب تانسوری هستند. پس تساوی $\sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle = \sum_j c'_j |v'_j\rangle \otimes |w'_j\rangle$ نیز خود از ترکیب سه رابطه‌ی (۹)، (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آید. نتیجه می‌گیریم که برای اثبات خوش‌تعریفی $S$ کافی است سازگاری آن با (۹)، (۱۰) و (۱۱) را نشان بدهیم، یعنی با اعمال $S$ بر دو طرف هر یک از تساوی‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) باز به رابطه‌ای مجاز می‌رسیم. با اعمال $S$ بر دو طرف تساوی اول به خودش می‌رسیم، و با اعمال $S$ بر تساوی دوم به تساوی سوم می‌رسیم و بالعکس. نتیجه اینکه $S$ با این سه رابطه سازگار است و این خوش‌تعریفی $S$ را نتیجه می‌دهد.

طبق تعریف به وضوح $S$ عملگری خطی است. از طرف دیگری $S$ پوشاست؛ برای هر $|w\rangle \otimes |v\rangle \in \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ داریم $S|v\rangle \otimes |w\rangle = |w\rangle \otimes |v\rangle$ و چون این بردارها فضای $\mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ را پوشش می‌دهند، $S$ پوشاست. همچنین توجه کنید که بعد دامنه و برد $S$ برابر است پس فضای پوچ $S$ صفر است. لذا $S$ یک یکریختی بین دو فضای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ و $\mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ نتیجه می‌دهد.

**مثال ۲۵** هر بردار در فضای برداری $\mathcal{W} = \mathbb{C}$ چیزی جز یک عدد نیست. پس می‌توانیم نگاشت $T : \mathcal{V} \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{V}$ را به صورت $T(|v\rangle \otimes w) = w|v\rangle$ تعریف کرده و آن را به صورت خطی روی کل فضا گسترش دهیم. طبق تعریف $T$ خطی است. همچنین بعد دامنه و برد برابر است و پوشا بودن $T$ واضح است. بنابراین اگر خوش‌تعریفی $T$ را نشان بدهیم آنگاه این نگاشت یک یکریختی بین $\mathcal{V}$ و $\mathcal{V} \otimes \mathbb{C}$ خواهد بود. برای خوش‌تعریفی $T$ کافی سازگاری آن را با روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) بررسی کنیم که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

**تمرین ۲۶** فرض کنید $\mathcal{V} = M_n(\mathbb{C})$ فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ باشد و $\mathcal{W} = \mathbb{C}^n$. نشان دهید عملگر $T : M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ که برای ماتریس‌های $A_i$ و بردارهای $|v_i\rangle$ و اعداد $c_i$ داشته باشیم

$$T(\sum_i c_i A_i \otimes |v_i\rangle) = \sum_i c_i A_i |v_i\rangle.$$

خوش تعریف است.

**تمرین ۲۷** فرض کنید $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathbb{C}$ یک فرم دو خطی باشد. یعنی $f$ نسبت به هر دو مولفه خطی باشد و داشته باشیم:

$$f(|v\rangle + \alpha|v'\rangle, |w\rangle) = f(|v\rangle, |w\rangle) + \alpha f(|v'\rangle, |w\rangle),$$

و به همین ترتیب برای مولفه‌ی دوم. نشان دهید عملگری خطی $T : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathbb{C}$ را می‌توان تعریف کرد به طوری که $T(|v\rangle \otimes |w\rangle) = f(|v\rangle, |w\rangle)$.

**نمایش مختصاتی بردارهای تانسوری:** فرض کنید $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathcal{V}$ و $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle\}$ پایه‌ای دلخواه برای $\mathcal{W}$ باشد. همچنین $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را بردارهایی دلخواه بگیرید. $|v\rangle$ را می‌توان در پایه‌ی $\mathcal{V}$ بسط داد $|v\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |v_i\rangle$ و در نتیجه نمایش مختصات آن در این پایه برابر است با

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب نمایش مختصاتی $|w\rangle$ را در پایه‌ی $\mathcal{W}$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

بگیرید. در این صورت

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j |w_j\rangle\right)$$

که طبق روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) برابر است با

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle.$$

دیدیم که $\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ یک پایه برای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ است. عبارت بالا در واقع بسط بردار $|v\rangle \otimes |w\rangle$ را بر حسب ترکیب خطی اعضای پایه نشان می‌دهد. پس نمایش مختصاتی $|v\rangle \otimes |w\rangle$ در این پایه برابر است با

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_1\beta_m \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_2\beta_m \\ \vdots \\ \alpha_n\beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

قضیه‌ی زیر ثابت شد.

**قضیه ۲۸** نمایش مختصاتی $|v\rangle \otimes |w\rangle$ در پایه‌ی $\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ از ضرب تانسوری نمایش مختصاتی $|v\rangle$ و $|w\rangle$ در پایه‌های $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle, \ldots, |w_m\rangle\}$ بدست می‌آید.

این قضیه در واقع خوش‌تعریفی ضرب تانسوری بردارهای $n$-تایی و $m$-تایی و سازگاری آن با ضرب تانسوری بردارهای دلخواه را نشان می‌دهد.

**تمرین ۲۹** پایه‌هایی برای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ مشخص و ماتریس نمایش عملگر $S$ در مثال ۲۴ را در پایه‌های متناظر برای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ و $\mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ حساب کنید.

## ۴.۲ ضرب داخلی روی فضای ضرب تانسوری

فرض کنید دو فضای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ مجهز به ضرب داخلی باشند. در این صورت می‌توان برای فضای $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ نیز یک ضرب داخلی تعریف کرد. برای این کار ضرب داخلی دو بردار به فرم $|v\rangle \otimes |w\rangle$ و $|v'\rangle \otimes |w'\rangle$ به صورت

$$(|v\rangle \otimes |w\rangle, |v'\rangle \otimes |w'\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}} = \langle v|v'\rangle \langle w|w'\rangle$$

تعریف و آن را به صورت خطی نسبت به مولفه‌ی دوم و پادخطی نسبت به مولفه‌ی اول گسترش می‌دهیم. به عبارت دیگر برای دو بردار دلخواه $|\Phi\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle|w_i\rangle$ و $|\Psi\rangle = \sum_j e_j|v'_j\rangle|w'_j\rangle$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}} &= \sum_{i,j} c_i^* e_j \left(|v_i\rangle, |v'_j\rangle\right)_{\mathcal{V}} (|w_i\rangle, |w'_j\rangle)_{\mathcal{W}} \\ &= \sum_{i,j} c_i^* e_j \langle v_i|v'_j\rangle\langle w_i|w'_j\rangle.\end{aligned}$$

باید نشان دهیم که اولا عبارت فوق خوش‌تعریف است و ثانیا این تعریف خواص ضرب داخلی را دارا می‌باشد.

مانند قبل برای خوش‌تعریفی باید سازگار بودن آن با روابط (۱۱)، (۱۰) و (۹) را نشان دهیم. مثلا برای هر بردار دلخواه $|\Phi\rangle = \sum_i c_i|v_i\rangle|w_i\rangle$ در فضای تانسوری باید نشان دهیم

$$\big(|\Phi\rangle, |v\rangle \otimes (|w\rangle + |w'\rangle)\big)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}} = (|\Phi\rangle, |v\rangle \otimes |w\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}} + (|\Phi\rangle, |v\rangle \otimes |w'\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}}.$$

سمت چپ این تساوی برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_i c_i^*(|v_i\rangle, |v\rangle)_{\mathcal{V}}(|w_i\rangle, |w\rangle + |w'\rangle)_{\mathcal{W}} &= \sum_i c_i^*(|v_i\rangle|v\rangle)_{\mathcal{V}}(|w_i\rangle, |w\rangle)_{\mathcal{W}} + \sum_i c_i^*(|v_i\rangle|v\rangle)_{\mathcal{V}}(|w_i\rangle, |w'\rangle)_{\mathcal{W}} \\ &= (|\Phi\rangle, |v\rangle \otimes |w\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}} + (|\Phi\rangle, |v\rangle \otimes |w'\rangle)_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}}.\end{aligned}$$

اثبات سازگاری با دو رابطه‌ی دیگر را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

حال باید نشان دهیم که این تعریف همه‌ی خواص ضرب داخلی را داراست. خواصی مانند خطی بودن نسبت به مولفه‌ی دوم براحتی قابل بررسی است. پس کافی است نشان دهیم

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \sum_{i,i'} c_i^* c_{i'} \langle v_i|v_{i'}\rangle\langle w_i|w_{i'}\rangle \geq 0$$

عددی نامنفی است و صفر است اگر و فقط اگر $|\Phi\rangle = 0$. برای این کار فرض کنید که $\alpha_{ik}$ ضرایب بسط بردار $|v_i\rangle$ در پایه‌ای متعامد یکه باشند و همچنین $\beta_{jl}$ ضرایب بسط $|w_j\rangle$ در پایه‌ای متعامد یکه باشند. در این صورت داریم

$$\langle v_i|v_{i'}\rangle = \sum_k \alpha_{ik}^* \alpha_{i'k}, \quad \langle w_i|w_{i'}\rangle = \sum_l \beta_{il}^* \beta_{i'l},$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Phi\rangle &= \sum_{i,i',k,l} c_i^* c_{i'} \alpha_{ik}^* \alpha_{i'k} \beta_{il}^* \beta_{i'l} \\ &= \sum_{k,l} \left|\sum_i c_i \alpha_{ik} \beta_{il}\right|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

**تمرین ۳۰** طبق روابط فوق $\langle\Phi|\Phi\rangle = 0$ اگر و فقط اگر برای هر $k, l$ داشته باشیم $\sum_i c_i\alpha_{ik}\beta_{il} = 0$ . نشان دهید که این تساوی‌ها معادلند با $|\Phi\rangle = 0$.

بنابراین رابطه‌ای که تعریف کردیم واقعا یک ضرب داخلی خوش‌تعریف روی فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ القا می‌کند.

گرچه ضرب داخلی تعریف شده روی فضای ضرب تانسوری به نظر پیچیده می‌آید، همان طور که گفته شد این ضرب داخلی چیزی جز استفاده از رابطه‌ی

$$(|v\rangle\otimes|w\rangle, |v'\rangle\otimes|w'\rangle) = \langle v|v'\rangle\langle w|w'\rangle$$

و بعد بسط آن نسبت به مولفه‌های اول و دوم نیست.

**مثال ۳۱** فرض کنید

$$|v\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad |v'\rangle = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

بردارهایی در $\mathbb{C}^3$ باشند و

$$|w\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

برداری در $\mathbb{C}^2$. در این صورت

$$(|v\rangle|w\rangle, |v'\rangle|w\rangle) = \langle v|v'\rangle\||w\rangle\|^2 = (-3+0+2)(1+4) = -5.$$

از طرف دیگر داریم

$$|v\rangle|w\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\2\\4\end{pmatrix}, \qquad |v'\rangle|w\rangle = \begin{pmatrix}-3\\-6\\1\\2\\1\\2\end{pmatrix},$$

که ضرب داخلی این دو به عنوان بردارهایی در فضای $\mathbb{C}^6$ برابر است با $-3-12+0+0+2+8 = -5$ . نتیجه می‌گیریم ضرب داخلی $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^2$ با ضرب داخلی $\mathbb{C}^6$ سازگار است.

**تمرین ۳۲** نشان دهید $\||v\rangle|w\rangle\| = \||v\rangle\|\cdot\||w\rangle\|$.

**قضیه ۳۳** فرض کنید $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathcal{V}$ و $\{|w_1\rangle,\ldots,|w_m\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه برای $\mathcal{W}$ باشد. در اینصورت

$$\{|v_i\rangle|w_j\rangle : \qquad 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m\}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ است.

**تمرین ۳۴** قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

**تمرین ۳۵** فرض کنید $\{|v\rangle, |v'\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای دو بعدی $\mathcal{V}$ باشد. نشان دهید چهار بردار

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle|v\rangle \pm |v'\rangle|v'\rangle), \qquad |\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle|v'\rangle \pm |v\rangle|v'\rangle)$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ تشکیل می‌دهند.

**مثال ۳۶** فرض کنید طول بردار $|\Phi\rangle = |v\rangle|w\rangle$ یک باشد. در این صورت $|v'\rangle$ و $|w'\rangle$ وجود دارند به طوری که $\||v'\rangle\| = \||w'\rangle\| = 1$ و $\Phi = |v'\rangle|w'\rangle$. برای این کار کافی است قرار دهیم $|v'\rangle = \frac{1}{\||v\rangle\|}|v\rangle$ و $|w'\rangle = \frac{1}{\||w\rangle\|}|w\rangle$.

**مثال ۳۷** پایه‌های متعامد یکه‌ی $|v_i\rangle$ و $|w_j\rangle$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که بردار دلخواهی به طول یک در فضای تانسوری $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$ داریم:

$$\sum_{ij} x_{ij}|v_i\rangle|w_j\rangle$$

در این صورت چون طول بردار برابر یک است داریم:

$$\sum_{ij} |x_{ij}|^2 = 1$$

پس می‌توان به

$$|x_{ij}|^2 \in [0,1] \quad \forall i,j.$$

به عنوان یک احتمال نگاه کرد و آن را $p_{ij}$ نامید. در این صورت $p_{ij}, \quad i \in [1:n], j \in [1:m]$ معنی یک توزیع مشترک میان دو متغیر تصادفی را خواهد داشت.

حال فرض کنید که بردار ما به صورت ضرب تانسوری $|v\rangle\otimes|w\rangle$ باشد که

$$|v\rangle = \sum_i \alpha_i|v_i\rangle, \qquad |w\rangle = \sum_j \beta_j|w_j\rangle.$$

در این صورت $x_{ij} = \alpha_i\beta_j$ و داریم $p_{ij} = |\alpha_i|^2|\beta_j|^2$. همچنین طبق مثال قبل می‌توان فرض کرد که طول هر یک از بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ برابر یک است. یعنی

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = \sum_j |\beta_j|^2 = 1$$

در این صورت

$$p_j = \sum_i p_{ij} = \sum_i |x_{ij}|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2|\beta_j|^2 = |\beta_j|^2$$

و مشابها

$$p_i = \sum_j p_{ij} = |\alpha_i|^2$$

پس $p_{ij} = p_ip_j$ و دو متغیر تصادفی مستقل خواهند بود.

**مثال ۳۸ (قابلیت بازیابی یکتا)** فرض کنید که جمع مستقیم دو بردار $|v\rangle$ و $|w\rangle$ یعنی $[|v\rangle, |w\rangle]$ را در دسترس داریم. در این صورت به سادگی می‌توان بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را از روی جمع مستقیم آنها بازیابی کرد؛ کافی است قسمت اول بردار را جدا کرده و آن را $|v\rangle$ بنامیم، و قسمت دوم آن را جدا کرده و $|w\rangle$ بنامیم.

اما حال فرض کنید که بردار $|v\rangle \otimes |w\rangle$ را در اختیار داریم. آیا می‌توانیم $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را به صورت یکتا بازیابی کنیم؟ جواب منفی است زیرا برای هر $\theta$ دلخواه

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = (\theta|v\rangle) \otimes (\frac{1}{\theta}|w\rangle)$$

بنابراین امکان بازیابی یکتای بردارها وجود ندارد. اما دو بردار $|v\rangle$ و $\theta|v\rangle$ که در تساوی بالا داریم همراستا هستند. آیا می‌توانیم حداقل راستاهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را به صورت یکتا بازیابی کنیم؟ جواب به این سؤال مثبت است. اگر برای پایه‌های $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ و $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ داشته باشیم $|v\rangle = \sum_i \alpha_i |v_i\rangle$ و $|w\rangle = \sum_j \beta_j |w_j\rangle$ آنگاه $|v\rangle|w\rangle = \sum_{i,j} x_{ij} |v_i\rangle|w_j\rangle$ که در آن

$$x_{ij} = \alpha_i \beta_j.$$

در نتیجه

$$\sum_j x_{ij} = \alpha_i \left( \sum_j \beta_j \right).$$

در نتیجه بردار

$$\begin{pmatrix} \sum_j x_{1j} \\ \sum_j x_{2j} \\ \vdots \\ \sum_j x_{nj} \end{pmatrix}$$

موازی با بردار

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

خواهد بود. پس می‌توان راستای بردار $|v\rangle$ را یافت.