نظریه اطلاعات کوانتمی ۱ ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱
مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

جلسه ۶

---

۱ عملگرهای خاص

در این بخش به تعریف و بررسی خواص عملگرهای هرمیتی، یکانی، بهنجار و مثبت خواهیم پرداخت. این عملگرها فقط در فضاهای با ضرب داخلی تعریف می‌شوند و لذا برای این فضاها می‌توان پایه‌های متعامد یکه را متصور شد. خواهیم دید که عملگرهای بهنجار عملگرهایی هستند که در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری می‌شوند و ماتریس‌های هرمیتی و یکانی مثال‌هایی از عملگرهای بهنجار هستند.

۱.۱ عملگرهای یکانی

تعریف ۱ $U \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ را یکانی[۱] می گوییم اگر $UU^\dagger = U^\dagger U = I$

دقت کنید که در تعریف بالا منظور از $U^\dagger$ الحاقی عملگر U است و این تعریف مستقل از انتخاب پایه برای فضا است. منظور از $UU^\dagger$ ترکیب دو عملگر یا اعمال پشت سر هم آنها است.

عملگر دوران در دو بعد نمونه‌ای از یک عملگر یکانی است. در صورتی که ماتریس مربوط به یک عملگر یکانی را در پایه‌ی متعامد یکه‌ی دلخواه $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_d\rangle$ بنویسیم به یک ماتریس یکانی می‌رسیم. دلیل این موضوع این است که اگر نمایش ماتریسی U را A بنامیم، طبق قضیه ای که در بخش الحاقی ثابت کردیم، ماتریس نمایش $U^\dagger$ همان $A^\dagger$ خواهد بود. پس ماتریس نمایش $UU^\dagger$ همان $AA^\dagger$ است، چون وقتی دو عملگر را با هم ترکیب میکنیم ماتریس نمایش آنها در هم ضرب میشود. چون عملگر $UU^\dagger$ همانی است، پس ماتریس نمایش آن باید ماتریس یکانی باشد. پس $AA^\dagger = I$. مشابها $A^\dagger A = I$. پس ماتریس نمایش یک عملگر یکانی یک ماتریس یکانی است.

عملگرهای یکانی همانند ماتریس‌های یکانی ضرب داخلی و طول را حفظ می‌کنند:

$$(U|v\rangle, U|w\rangle) = \langle v|U^\dagger U|w\rangle = \langle v|I|w\rangle = \langle v|w\rangle$$

این موضوع در مورد تبدیل دوران در صفحه واضح است. برعکس این موضوع نیز درست است:

قضیه ۲ U ضرب داخلی را حفظ می کند اگر و فقط اگر U یکانی باشد

$$(U|\omega\rangle, U|v\rangle) = (|\omega\rangle, |v\rangle) \ \ \forall |v\rangle, |\omega\rangle \quad \Leftrightarrow \quad UU^\dagger = U^\dagger U = I.$$

[۱] Unitary

تمرین ۳ قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

در ادامه خواهیم دید که هر عملگر یکانی U را می‌توان در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری کرد. اگر به ماتریس قطری شده‌ی عملگر در این پایه‌ی متعامد یکه نگاه کنیم، آنگاه شرط $AA^\dagger = I$ نتیجه می‌دهد که تمامی مقادیر ویژه‌ی U اعدادی مختلط با اندازه‌ی واحد هستند؛ یا به عبارت دیگر اعدادی بشکل $e^{i\theta}$ هستند که به آنها فاز گفته می‌شود.

۲.۱ عملگرهای هرمیتی

تعریف ۴ یک عملگر T از فضای $\mathcal{V}$ به خودش ($T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$) را هرمیتی[۲] (خود الحاق) می‌گوییم اگر $T^\dagger = T$.

اگر شکل ماتریسی عملگر هرمیتی T را در یک پایه‌ی متعامد یکه با A نشان دهیم آنگاه مزدوج ترانهاده ماتریس A با ماتریس A برابر است زیرا اگر نمایش ماتریسی T را A بنامیم، طبق قضیه ای که در بخش الحاقی ثابت کردیم، ماتریس نمایش $T^\dagger$ همان $A^\dagger$ خواهد بود. رابطه $T^\dagger = T$ رابطه $A^\dagger = A$ را نتیجه میدهد.

بر این اساس ماتریس‌های هرمیتی را نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۵ ماتریس A را هرمیتی گوییم اگر $A^\dagger = A$.

مثال ۶ ماتریس زیر نمونه ای از یک ماتریس هرمیتی است.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۷ فرض کنید $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ با $TX = AXB$ تعریف شده باشد که در آن A و B دو ماتریس دلخواه باشند. در چه شرایطی T هرمیتی و یا یکانی است؟

مثال ۸ سه ماتریس مشهور هرمیتی که به عملگرهای پاولی معروف هستند به شرح زیر هستند:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ماتریس‌های هرمیتی در مسائل کاربردی زیادی به صورت طبیعی ظاهر می‌شوند.

مثال ۹ تابع دوبار مشتق پذیر $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. ماتریس هسیان این تابع $H = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}]$ ماتریسی حقیقی و متقارن خواهد بود (زیرا $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$)، و در نتیجه هرمیتی است.

مثال ۱۰ ماتریس دلخواه $A = [a_{ij}]$ با درایه های حقیقی را مفروض بگیرید. فرم درجه دو زیر را در نظر بگیرید:

$$v^t A v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) v_i v_j = v^t \left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right) v$$

بنابراین فرم درجه دو A و $\frac{1}{2}(A + A^t)$، یکسان است و ماتریس دومی حقیقی و متقارن است. پس برای مطالعه فرم‌های درجه دو کافی است ماتریس‌های هرمیتی را در نظر بگیریم.

[۲] Hermitian

مثال ۱۱ اگر یک گراف (غیرجهتدار) داشته باشیم، ماتریس مجاورت آن ماتریسی هرمیتی خواهد بود. در درس تئوری مدار هم به ماتریس های متقارن و حقیقی بر میخوردیم.

در ادامه به تعریف دیگری که شبیه تعریف هرمیتی است نیاز داریم.

تعریف ۱۲ $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ را هرمیتی اریب [۳] می‌گوییم اگر $T^\dagger = -T$. مشابها ماتریس A را هرمیتی اریب می‌گویند اگر $A^\dagger = -A$.

قضیه ۱۳ خواص زیر در مورد عملگرهای هرمیتی برقرار است.

۱. برای هر عملگر دلخواه T عملگرهای $TT^\dagger$، $T^\dagger T$ و $T + T^\dagger$ هرمیتی هستند.

۲. برای هر عملگر هرمیتی T، و k صحیح، عملگر T^k هرمیتی است.

۳. اگر عملگر هرمیتی T وارون‌پذیر باشد، T^{-1} هرمیتی است.

۴. اگر T و S هرمیتی باشند، برای ضرایب حقیقی a و b عملگر $aT + bS$ هرمیتی است. این موضوع زمانی که ضرایب a، b مختلط باشند لزوما درست نیست. بصورت خاص اگر T هرمیتی باشد، iT هرمیتی اریب است.

۵. برای هر عملگر دلخواه T عملگر $T - T^\dagger$ هرمیتی اریب است.

۶. اگر T و S هرمیتی اریب باشند، برای ضرایب حقیقی a و b عملگر $aT + bS$ هرمیتی اریب است. این موضوع زمانی که ضرایب a، b مختلط باشند لزوما درست نیست. بصورت خاص اگر T هرمیتی اریب باشد، iT هرمیتی است.

۷. اگر T و S هرمیتی باشند، TS هرمیتی است اگر و فقط اگر T و S با هم جابجا شوند (یعنی $TS = ST$)

۸. هر عملگر دلخواه T را میتوان جمع یک عملگر هرمیتی و یک عملگر هرمیتی اریب نوشت:

$$T = \frac{1}{2}\left(T + T^\dagger\right) + \frac{1}{2}\left(T - T^\dagger\right)$$

که $\frac{1}{2}(T + T^\dagger)$ بخش هرمیتی و $\frac{1}{2}(T - T^\dagger)$ بخش هرمیتی اریب T نامیده می‌شود. به همین ترتیب هر عملگر خطی را می‌توان به صورت ترکیب خطی دو عملگر هرمیتی نوشت.

۹. ضرایب روی قطر یک ماتریس هرمیتی همگی حقیقی هستند. برای مشخص کردن n^2 درایه یک ماتریس هرمیتی، کافی است که n عدد حقیقی دلخواه برای درایه‌های روی قطر و $\frac{1}{2}n(n-1)$ عدد مختلط دلخواه برای درایه‌های بالای قطر مشخص کرد. درایه‌های پایین قطر به صورت یکتا بر حسب درایه‌های بالای قطر مشخص می‌شوند.

۱۰. اگر عملگر T هرمیتی باشد، عملگر $S^\dagger TS$ نیز برای هر ماتریس دلخواه S هرمیتی است.

---
[۳] Skew-Hermitian

۱۱. برای هر عملگر هرمیتی T و برای هر بردار $|v\rangle$، $\langle v|T|v\rangle$ عددی حقیقی است زیرا با مزدوج مختلط خودش برابر است.

خواص فوق را بعنوان تمرین ثابت کنید.

در ادامه خواهیم دید که عملگرهای هرمیتی را می‌توان در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری کرد. همچنین دیدیم که ماتریس نمایش یک عملگر هرمیتی در یک پایه‌ی متعامد یکه خود هرمیتی است. پس ماتریس قطری شده‌ی عملگر هرمیتی هرمیتی است، پس درایه‌های روی قطر آن حقیقی هستند. نتیجه این که مقادیر ویژه‌ی عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند.

تمرین ۱۴ نشان دهید رتبه‌ی یک عملگر هرمیتی برابر تعداد مقادیر ویژه‌ی ناصفر آن است. با ارایه‌ی یک مثال نشان دهید که این خاصیت برای عملگرهای غیر هرمیتی برقرار نیست.

تمرین ۱۵ اگر A ماتریسی هرمیتی و ناصفر باشد، نشان دهید که

$$rank(A) \geq \frac{(trA)^2}{tr(A^2)}$$

راهنمایی: مقادیر ویژه‌ی ناصفر A را در نظر بگیرید و دقت کنید که $tr(A)$ جمع مقادیر ویژه و $tr(A^2)$ جمع مجذور مقادیر ویژه است. سپس از نامساوی کوشی شوارتز استفاده کنید.

تمرین ۱۶ ثابت کنید که مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس اریب هرمیتی همگی مختلط محض هستند.

تمرین ۱۷ اگر A و B هرمیتی باشند، نشان دهید $tr((AB)^2) \leq tr(A^2B^2)$. راهنمایی: ثابت کنید که ماتریس $AB - BA$ اریب هرمیتی است و عبارت $tr((AB-BA)^2)$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۱۸ ثابت کنید که دو ماتریس هرمیتی متشابه هستند، اگر و فقط اگر متشابه یکانی باشند.

۳.۱ عملگرهای نرمال

در قضیه‌ی تجزیه‌ی شور دیدیم که هر عملگر را می‌توان در پایه‌ای متعامد یکه بالا مثلثی کرد؛ اما لزوما نمی‌توان آن را قطری کرد. عملگرهای نرمال یا بهنجار[۴] عملگرهایی هستند که قابل قطری شدن در یک پایه متعامد یکه هستند. یا به عبارت دیگر عملگرهایی که برای یک پایه متعامد یکه $\{|v_i\rangle\}$ قابل بیان به فرم زیر بر حسب عملگرهای ساده هستند:

$$T = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$$

نشان خواهیم داد که این تعریف با تعریف زیر از عملگرهای نرمال معادل است.

تعریف ۱۹ $T \in \mathbf{L}(V)$ را نرمال می گوییم اگر با الحاقی خود جابجا شود : $TT^\dagger = T^\dagger T$.

[۴] Normal

قضیه زیر نشان می‌دهد که دو تعریف داده شده از عملگرهای نرمال معادل هستند:

قضیه ۲۰ T در یک پایه‌ی «متعامد یکه» قطری شدنی است اگر و فقط اگر $TT^\dagger = T^\dagger T$.

توجه کنید که در قضیه‌ی فوق هیچ شرطی در مورد بردارهای ویژه و یا مقادیر ویژه‌ی T گذاشته نشده است. $TT^\dagger = T^\dagger T$ به تنهایی کافی است که نه تنها T قطری شود بلکه در یک پایه‌ی متعامد یکه.

اثبات: اگر T در پایه‌ای متعامد یکه‌ی $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ قطری شود آنگاه $|v_i\rangle$ بردار ویژه‌ی T است با مقدار ویژه‌ی λ_i و داریم

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

در این صورت

$$T^\dagger = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* |v_i\rangle\langle v_i|,$$

و

$$TT^\dagger = T^\dagger T = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 |v_i\rangle\langle v_i|.$$

برعکس فرض کنید که $TT^\dagger = T^\dagger T$. با استفاده از تجزیه شور می‌توان عملگر را در پایه‌ی متعامد یکه‌ای نوشت که نمایش ماتریسی آن A ماتریسی بالا مثلثی باشد. از آنجا که پایه متعامد یکه است ماتریس نمایش $T^\dagger$ در این پایه برابر است با $A^\dagger$ است و از $TT^\dagger = T^\dagger T$ نتیجه می‌گیریم

$$AA^\dagger = A^\dagger A.$$

نشان می‌دهیم که این رابطه به همراه بالا مثلثی بودن A قطری بودن A را نتیجه می‌دهد. اگر درایه‌ی $(1,1)$ دو طرف تساوی را برابر قرار دهیم به رابطه

$$a_{11}^* a_{11} = a_{11} a_{11}^* + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|^2$$

می‌رسیم که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|^2 = 0.$$

در نتیجه

$$a_{1j} = 0, \quad j \geq 2$$

اگر درایه‌ی $(2,2)$ دو طرف تساوی را مساوی قرار دهیم به رابطه

$$a_{22}^* a_{22} = a_{22} a_{22}^* + \sum_{j=3}^{n} |a_{2j}|^2$$

می‌رسیم که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{j=3}^{n} |a_{2j}|^2 = 0$$

در نتیجه

$$a_{2j} = 0, \quad j \geq 3$$

با ادامه این کار می‌توان ثابت کرد که

$$a_{ij} = 0, \quad j > i$$

یعنی ماتریس پایین مثلثی است. در ضمن می‌دانیم که ماتریس بالا مثلثی نیز هست. پس حتما باید قطری باشد. $\square$

ماتریس های نرمال شبیه عملگرهای نرمال تعریف می‌شوند:

تعریف ۲۱ ماتریس A را نرمال گوییم اگر $AA^\dagger = A^\dagger A$.

عملگرهای هرمیتی و یکانی، نرمال هستند زیرا به وضوح در رابطه $TT^\dagger = T^\dagger T$ صدق می‌کنند. اما هر عملگر نرمال لزوما یکانی یا هرمیتی نیست. مثلا ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نرمال است زیرا

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^*A.$$

اما این ماتریس یکانی یا هرمیتی نیست.

قضیه ۲۲ از روی مقادیر ویژه یک عملگر نرمال (یا یک ماتریس نرمال) میتوان به هرمیتی بودن یا یکانی بودن عملگر پی برد:

(الف) مقادیر ویژه‌ی عملگر نرمال M همگی حقیقی‌اند اگر و فقط اگر M هرمیتی باشد.

(ب) مقادیر ویژه عملگر نرمال M همگی فازند اگر و فقط اگر M یکانی باشد. مقدار ویژه‌ی λ فاز است اگر $|\lambda| = 1$.

اثبات: پایه‌ای که عملگر در آن قطری می‌شود را در نظر بگیرید. فرض کنید ماتریس مربوطه A باشد. مقادیر ویژه در روی قطر ظاهر می‌شوند و می‌توان تحقیق کرد که ماتریس مربوطه هرمیتی یا یکانی است. نمایش ماتریسی عملگرهای $T^\dagger$ و $TT^\dagger$ در این پایه همان $A^\dagger$ و $AA^\dagger$ هستند و درستی روابط به سادگی قابل تحقیق است.

$\square$

قضیه ۲۳ هرکدام از شرط‌های زیر با نرمال بودن ماتریس A معادل است:

(۱) ماتریس A دارای یک مجموعه n تایی از بردار ویژه های متعامد می‌باشد.

(۲) رابطه زیر میان مجموع مجذور قدرمطلق عناصر و مجموع مجذور مقادیر ویژه ماتریس برقرار است:

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$$

اثبات: اینکه ماتریس A در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری شود قسمت (۱) را به طور مستقیم نتیجه می‌دهد. اما فرض کنید ماتریس A دارای یک مجموعه‌ی n تایی از بردارهای ویژه‌ی متعامد باشد. در این صورت می‌توان آنها را ستون‌های یک ماتریس U قرار داد و این ماتریس A را قطری می‌کند.

جهت اثبات قسمت (۲) ابتدا توجه کنید که در قضیه ای که جلسه قبل ثابت شد داشتیم که هر دو نمایش ماتریس که توسط یک ماتریس یکانی به هم تبدیل شوند دارای مجموع مجذور قدرمطلق های یکسان هستند. اگر ماتریسی در پایه متعامد یکه‌ای قطری شود، درایه های ناصفر آن مقادیر ویژه خواهند بود پس مجموع مجذور قدرمطلق‌های درایه‌ها همان $\sum_i |\lambda_i|^2$ می‌باشد و این باید با مجموع مجذور درایه‌ها در هر پایه متعامد یکه‌ی دلخواه دیگری برابر باشد.

اما برعکس فرض کنید

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$$

ثابت می‌کنیم که ماتریس نرمال است. می‌دانیم که بر اساس تجزیه شور می‌توان پایه‌ای یافت که ماتریس را بالا مثلثی کند. در این صورت اگر ماتریس بالا مثلثی مربوطه را B بنامیم داریم:

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_{ij} |b_{ij}|^2$$

اما چون درایه های روی قطر B همان مقادیر ویژه هستند داریم:

$$\sum_{ij} |b_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |b_{ij}|^2$$

با توجه به

$$\sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$$

نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i<j} |b_{ij}|^2 = 0.$$

در نتیجه

$$b_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

لذا ماتریس قطری است. پس A در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری می‌شود، پس نرمال است. □

قضیه ۲۴ دو عملگر نرمال T و S در یک پایه‌ی متعامد یکه، همزمان قطری شدنی هستند اگر و فقط اگر جابجا شوند یعنی

$$[T,S]=TS-ST=0.$$

تمرین ۲۵ قضیه‌ی فوق را ثابت کنید.

تمرین ۲۶ فرض کنید که عملگر هرمیتی T از یک فضا به خودش را داریم. اگر زیرفضای برداری $\mathcal{V}_1$ برای T ناوردا باشد، یعنی

$$T\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_1,$$

ثابت کنید که زیرفضای برداری عمود بر $\mathcal{V}_1$ هم برای T ناوردا است.

۲ مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی به عنوان جواب یک مساله‌ی بهینه‌سازی

برای ماتریس‌های دلخواه A تنها بیانی که از مقادیر ویژه وجود دارد همان ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه است. اما در مورد ماتریس های هرمیتی روش دیگری برای مشخص کردن مقادیر ویژه به عنوان جواب مسائل بهینه‌سازی خاصی وجود دارد.

بردار دلخواه $|v\rangle$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی میان تصویر این بردار توسط یک عملگر هرمیتی T یا $T|v\rangle$، با خود بردار $|v\rangle$ را می‌توان به شکل $\langle v|T|v\rangle$ نوشت. می‌دانیم که این عدد همواره حقیقی است اگر و فقط اگر T هرمیتی باشد. زیرا اگر مثلا $\langle v|T|v\rangle$ حقیقی باشد، با مزدوج مختلط آن برابر است؛ پس

$$\langle v|T|v\rangle = \langle v|T^\dagger|v\rangle \quad \forall |v\rangle$$

یا

$$\langle v|(T-T^\dagger)|v\rangle = 0 \quad \forall |v\rangle.$$

اما اگر $T-T^\dagger$ ناصفر باشد، می‌توانیم $|v\rangle$ را در راستای بردار ویژه‌اش بگیریم و به تناقض برسیم. پس مقدار $\langle v|T|v\rangle$ حقیقی است و میتوان صحبت از ماکزیمم و مینیمم آن کرد.

فرض کنید که مقادیر ویژه‌ی عملگر هرمیتی T را با $\lambda_{\min}=\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_n = \lambda_{\max}$. در این صورت قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲۷ روابط زیر برقرار است:

$$\lambda_1 \||v\rangle\|^2 \le \langle v|T|v\rangle \le \lambda_n \||v\rangle\|^2, \qquad \forall |v\rangle,$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{|v\rangle\neq 0} \frac{\langle v|T|v\rangle}{\||v\rangle\|^2} = \max_{\||v\rangle\|=1} \langle v|T|v\rangle,$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{|v\rangle\neq 0} \frac{\langle v|T|v\rangle}{\||v\rangle\|^2} = \min_{\||v\rangle\|=1} \langle v|T|v\rangle.$$

اثبات:

چون T هرمیتی است پایه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی آن وجود دارد. این پایه را $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ بنامید و فرض کنید $T|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$. در این صورت داریم

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

فرض کنید $|v\rangle = \sum_i \alpha_i |v_i\rangle$. داریم

$$\||v\rangle\|^2 = \langle v|v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* \alpha_j \langle v_i|v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

همچنین

$$\begin{aligned} \langle v|T|v\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* \alpha_j \langle v_i|T|v_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^* \alpha_j \lambda_j \langle v_i|v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_i \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\langle v|T|v\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_{\max} = \lambda_{\max} |\alpha_i|^2 = \lambda_{\max} \||v\rangle\|^2,$$

و به همین ترتیب $\langle v|T|v\rangle \geq \lambda_{\min} \||v\rangle\|^2$.

برای اثبات دو عبارت دیگر بردارهای $|v\rangle = |v_n\rangle$ و $|v\rangle = |v_1\rangle$ را در نظر بگیرید.

□

شهود هندسی قضیه این است که λ_n بزرگترین مقدار $\langle v|A|v\rangle$ می‌باشد زمانی که $|v\rangle$ روی کره واحد حرکت می‌کند.

قضیه بالا نتیجه زیر را در بر دارد: اگر $|v\rangle$ بردار دلخواهی در فضا باشد و تعریف کنیم $\alpha = \frac{\langle v|A|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$ آنوقت ماتریس A حداقل یک مقدار ویژه در بازه $(-\infty, \alpha]$ و یک مقدار ویژه در بازه $[\alpha, \infty)$ دارد.

قضیه بالا در مورد بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس هرمیتی A صحبت می‌کند. اما آیا می‌توانیم گزاره‌ی مشابهی در مورد بقیه مقادیر ویژه بگوییم؟ جواب مثبت است. می‌توان نشان داد که اگر به جای محاسبه ماکزیمم $\frac{\langle v|A|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$ روی تمامی بردارهای فضا، تنها بردارهایی را در نظر بگیریم که به بردار ویژه‌ی مربوط به λ_n عمودند، آنگاه حاصل مقدار ویژه λ_{n-1} خواهد بود (یعنی دومین مقدار ویژه از نظر بزرگی). اثبات این موضوع با استفاده از همان تکنیک‌های اثبات قضیه‌ی قبل ساده است.

۳ عملگرهای مثبت نیمه معین

بردار دلخواه $|v\rangle$ را در نظر بگیرید. دیدیم که $\langle v|T|v\rangle$ همواره حقیقی است اگر و فقط T هرمیتی باشد.

تعریف ۲۸ عملگر $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ را مثبت نیمه معین[۵] گویند هرگاه

$$\forall |v\rangle \in \mathcal{V} : \quad \langle v|T|v\rangle \geqslant 0.$$

در این صورت می‌نویسم $T \geq 0$. همچنین $T \in \mathbf{L}(\mathcal{V})$ را مثبت معین[۶] گویند هرگاه

$$\forall |v\rangle \in \mathcal{V} - \{0\} : \langle v|T|v\rangle > 0,$$

و می‌نویسیم $T > 0$.

توجه کنید که در این تعریف چون فرض کرده‌ایم $\langle v|T|v\rangle$ حقیقی است، هر عملگر مثبت نیمه معین هرمیتی نیز هست. عملگرهای مثبت معین در واقع تعمیمی از مفهوم اعداد مثبت را برای عملگرها فراهم می‌آورند.

اگر نمایش ماتریسی یک عملگر مثبت نیمه معین در یک پایه‌ی متعامد یکه را با A نشان دهیم ماتریس A دارای این خاصیت است که برای تمامی بردارهای n تایی از اعداد مختلط $|v\rangle$، عبارت $\langle v|A|v\rangle$ عددی حقیقی و مثبت است:

$$\forall |v\rangle \in \mathbb{C}^n : \quad \langle v|A|v\rangle \geqslant 0.$$

تعریف ۲۹ ماتریس A را مثبت نیمه معین گوییم اگر

$$\forall |v\rangle \in \mathbb{C}^n : \quad \langle v|A|v\rangle \geqslant 0.$$

مثال ۳۰ ماتریس همانی مثبت است.

$$\langle v| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

اما ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

مثبت نیست زیرا

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \not> 0.$$

مثال ۳۱ ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس هرمیتی نیست، اما اگر مولفه های $|v\rangle$ حقیقی باشند، همواره نامنفی است.

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b)a + (a+b)b = a^2 + b^2,$$

[۵] Positive semidefinite
[۶] Positive definite

اما

$$\begin{pmatrix}1 & -\mathbf{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\mathbf{i}\end{pmatrix} = 2 + 2\mathbf{i} \notin \mathbb{R}.$$

پس این ماتریس مثبت نیمه معنی نیست.

مثال ۳۲ مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 5\end{pmatrix}$$

اگر این ماتریس را از دو طرف در اعضای پایه ضرب کنیم، حاصل مثبت میشود:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10\\ 10 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 5 > 0$$

اما این ماتریس مثبت نیمه معین نیست.

تمرین ۳۳ ثابت کنید ماتریس هرمیتی 2×2

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ b^* & d\end{pmatrix}$$

مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر a, d اعداد حقیقی باشند و $a \geq 0$ و $\det A \geq 0$.

تمرین ۳۴ ثابت کنید اگر ماتریس A مثبت نیمه معین باشد، تمامی زیرماتریس‌های مربعی‌اش هم مثبت نیمه معین هستند.

مثال ۳۵ به ازای هر $A \in \mathbf{L}(V)$، $A^\dagger A$ مثبت نیمه معین است زیرا

$$\langle v|A^\dagger A|v\rangle = (A|v\rangle)^\dagger A|v\rangle = \|A|v\rangle\|^2 \geq 0$$

همچنین بصورت مشابه $AA^\dagger$ مثبت نیمه معین است

تمرین ۳۶ فرض کنید A ماتریسی مثبت نیمه معین باشد. نشان دهید درایه‌های روی قطر A همگی حقیقی و نامنفی هستند.

قضیه ۳۷ T مثبت نیمه معین است اگر و فقط اگر

- Tهرمیتی باشد: $T^\dagger = T$ و
- همه مقادیر ویژه T نامنفی باشند

اثبات: اینکه همواره $\langle v|T|v\rangle$ حقیقی است اگر و فقط T هرمیتی باشد را در بخش قبل ثابت کردیم. اما اینکه تمامی مقادیر ویژه T باید نامنفی باشند را به دو گونه می‌توان دید. اول اینکه

$$\lambda_{\min} = \min_{|v\rangle\neq 0} \frac{\langle v|T|v\rangle}{\||v\rangle\|^2}.$$

پس کوچکترین مقدار ویژه نامنفی است اگر و فقط اگر ماتریس مثبت نیمه معین باشد (زیرا مخرج کسر همواره نامنفی است). اما شاید بیان مستقیم اثبات بدون ارجاع به قضیه‌ای که ثابت شد مفید باشد.

اگر T نامنفی باشد، تمام مقادیر ویژه‌اش باید نامنفی باشد زیرا اگر $|v\rangle$ را در راستای بردار ویژه‌اش بگیریم، داریم

$$\langle v|T|v\rangle = \langle v|(\lambda|v\rangle) = \lambda\langle v||v\rangle = \lambda\||v\rangle\|^2.$$

برعکس فرض کنید که T عملگری هرمیتی باشد و تمام مقادیر ویژه‌اش نامنفی باشند. بردارهای ویژه و مقادیر ویژه‌ی T را با $|v_i\rangle$ و λ_i نشان دهید. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\langle v|T|v\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle v|v_i\rangle\langle v_i|T|v_j\rangle\langle v_j|v\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \langle v|v_i\rangle\langle v_i|v_j\rangle\langle v_j|v\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v|v_i\rangle\langle v_i|v\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\langle v|v_i\rangle|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

□

اما برخی از خواص عملگرهای مثبت نیمه معین که به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

۱. اگر T یک عملگر مثبت نیمه معین باشد آنگاه

$$\forall S: S^\dagger T S \geq 0.$$

۲. به ازای هر $T \geq 0$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ که $\alpha > 0$ داریم $\alpha T \geq 0$.

۳. به ازای هر $T, S \geq 0$ داریم $T + S \geq 0$.

تمرین ۳۸ برای هر $M, N \geq 0$ که M و N با هم جابجا شوند، یعنی $MN = NM$، نشان دهید $MN \geq 0$.

تمرین ۳۹ برای هر عملگر هرمیتی T نشان دهید $T^2 \geq 0$. نتیجه بگیرید که هر عملگر هرمیتی تصویر ($T^2 = T$) مثبت نیمه معین است.

تمرین ۴۰ فرض کنید A ماتریسی مثبت نیمه معین باشد. نشان دهید ماتریس‌های زیر مثبت نیمه معین هستند.

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

تمرین ۴۱ نشان دهید برای هر عملگر هرمیتی T، $\alpha \geq 0$ وجود دارد به طوری که $T + \alpha I$ مثبت نیمه معین باشد.

تمرین ۴۲ برای دو عملگر هرمیتی S, T می‌نویسیم $S \geq T$ اگر $S - T$ مثبت نیمه معین باشد. نشان دهید این تعریف یک ترتیب روی فضای ماتریس‌های هرمیتی می‌گذارد. همچنین نشان دهید $I \geq T \geq 0$ اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه‌ی T بین صفر و یک باشند.

تمرین ۴۳ فرض کنید T, S دو عملگر مثبت نیمه معین باشند. ثابت کنید $tr(ST) \geq 0$.

راهنمایی: فرض کنید $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ پایه‌ای متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی T باشد و از رابطه‌ی $tr(X) = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|X|v_i\rangle$ استفاده کنید.

تمرین ۴۴ فرض کنید A و B دو ماتریس مثبت نیمه معین باشند و $trAB = 0$ (اما شرط جابجایی A و B داده نشده است). ثابت کنید $AB = BA = 0$.

تمرین ۴۵ فرض کنید A ماتریسی مثبت نیمه معین باشد و تعریف کنید $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ با $TX = AX$. نشان دهید T عملگری مثبت نیمه معین است.

مثال ۴۶ زمانی که یک ماتریس نامنفی A داشته باشیم، میتوانیم صحبت از ماتریس $B = \sqrt{A}$ بکنیم. انتظار ما این است که B نیز نامنفی باشد، و بعلاوه $A = B^2$. در نتیجه مقادیر ویژه B ریشه دوم مقادیر ویژه A باید باشند. جهت تعریف B، ماتریس A را در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری کنید

$$A = U^\dagger \Lambda U$$

از آنجایی که درایه های روی قطر Λ نامنفی هستند، میتوان از آن ریشه گرفت. حال قرار دهید

$$B = U^\dagger \sqrt{\Lambda} U$$

در این صورت

$$B^2 = U^\dagger \sqrt{\Lambda} U U^\dagger \sqrt{\Lambda} U = U^\dagger \Lambda U = A.$$

ریشه‌ی یک عملگر را به طور معادل می‌توان به صورت زیر تعریف کرد. اگر $T \geq 0$ برای پایه‌ای متعامد یکه $\{|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ و اعداد نامنفی $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ داریم $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$. حال قرار دهید

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} |v_i\rangle\langle v_i|.$$

در این صورت داریم $S^2 = T$ و لذا می‌توانیم تعریف کنیم $S = \sqrt{T}$.

نکته: $B = \sqrt{A}$ را برای ماتریس های با مقادیر ویژه نامنفی A که لزوما هرمیتی نیستند نیز می‌توان تعریف کرد. در صورتی که ماتریس قطری بشود، آن را قطری کرده و مشابه بالا بجای ماتریس قطری ریشه آن را قرار می‌دهیم.

۱.۳ قضیه تجزیه قطبی

قضیه ۴۷ برای هر عملگر T (نه لزوما هرمیتی)، عملگر یکانی U و عملگر مثبت نیمه معین P وجود دارد به طوری که $T = UP$.

مشابه این قضیه برای ماتریس‌ها نیز برقرار است.

دلیل اینکه این تجزیه، تجزیه‌ی قطبی نامیده می‌شود این است: فرض کنید که A ماتریسی یک در یک است (یعنی یک عدد مختلط). در این صورت تجزیه آن در مختصات قطبی به این شکل است:

$$A = re^{\mathbf{i}\theta}$$

که در آن r عدد نامنفی است و $e^{\mathbf{i}\theta}$ موهومی محض است. می‌بینیم که ماتریس U نقش $e^{\mathbf{i}\theta}$ را بازی می‌کند (چون تمامی مقادیر ویژه‌اش روی دایره واحد هستند) و P نقش r را. بنابراین نمایش بالا تعمیمی از تجزیه قطبی برای اسکالرها به فضای عملگرها و ماتریس‌ها است.

به طور شهودی هر عملگر T به دو بخش تجزیه می‌شود: یک بخش که فضا را در جهات یک دستگاه مختصات متعامد یکه میکشد (که توسط P نمایش داده شده)، و یک دوران که توسط U نمایش داده شده است. این موضوع شبیه ضرب در یک عدد مختلط است: هنگام ضرب طول بردار تغییر کرده (در r ضرب می‌شود) و سپس به اندازه θ می‌چرخد.

نکته: از رابطه‌ی $T = UP$ می‌توان نتیجه گرفت

$$T^\dagger T = P^\dagger U^\dagger U P = P^\dagger P = P^2$$

در نتیجه

$$P = \sqrt{T^\dagger T}$$

دقت کنید که این رابطه مشابه حالت اسکالر برای طول یک عدد مختلط است.

اثبات: در اینجا قضیه تجزیه قطبی را در حالت خاصی که $T^\dagger T$ وارون‌پذیر است ثابت میذکنیم. اثبات کامل را می‌توانید در کتب جبرخطی بیابید. عملگر P را برابر

$$P = \sqrt{T^\dagger T}$$

قرار داده و U را برابر

$$U = TP^{-1} = T\left(\sqrt{T^\dagger T}\right)^{-1}$$

قرار دهید. دقت کنید که وارون پذیری T و $T^\dagger T$ نتیجه می‌دهد که تمامی مقادیر ویژه‌ی این عملگرها ناصفر هستند، و در نتیجه مقادیر ویژه $\sqrt{T^\dagger T}$ نیز ناصفر هستند. در نتیجه عملگر $\sqrt{T^\dagger T}$ وارون پذیر است و U خوش تعریف.

P طبق تعریف مثبت نیمه معین است. همچنین به وضوح $T = UP$ برقرار است. پس کافی است نشان دهیم U یکانی است. داریم:

$$U^\dagger U = \left(\sqrt{T^\dagger T}\right)^{-1} T^\dagger T \left(\sqrt{T^\dagger T}\right)^{-1}$$

که در اینجا از خواص عملگرهای هرمیتی، و هرمیتی بودن وارون $\sqrt{T^\dagger T}$ استفاده کردیم. اگر $\sqrt{T^\dagger T}$ را S بنامیم رابطه بالا معادل است با

$$S^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}SSS^{-1} = I.$$

پس ماتریس U یکانی است. □

۴ تجزیه مقدارهای منفرد

دیدیم که ماتریس‌های نرمال A ماتریس‌هایی هستند که برای آنها ماتریس یکانی U وجود دارد بطوریکه

$$U^{-1}AU = U^\dagger AU$$

قطری باشد. برای ماتریس‌های غیرنرمال چنین کاری امکان ندارد. قضیه‌ی تجزیه مقدارهای منفرد یا قضیه تجزیهٔ مقدارهای تکین (Singular value decomposition) نشان می‌دهد که می‌توان هر ماتریس دلخواه را از دو طرف در دو ماتریس یکانی ضرب کرد تا قطری شود، اما لزوما این دو ماتریس یکانی وارون هم نیستند.

از آنجایی که این قضیه در مورد ماتریس های غیر مربعی هم درست است، نیاز به یک تعریف داریم. یک ماتریس D را «قطری مستطیلی» می‌نامیم اگر $D_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$. مثلا ماتریس های زیر قطری مستطیلی هستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قضیه ۴۸ برای هر ماتریس (نه لزوما مربعی) $A_{m\times n}$، ماتریس‌های یکانی $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ و ماتریس قطری مستطیلی $D_{m\times n}$ با درایه‌های روی قطر حقیقی و نامنفی وجود دارند به طوری که

$$A = UDV.$$

توضیح. به مقادیر روی قطر D مقادیر تکین (Singular values) ماتریس A گفته می‌شود؛ این مقادیر یکتا هستند و در هر تجزیه‌ای از این دست یکسان هستند. اما ماتریس‌های U و V لزوما یکتا نیستند.

ماتریس $AA^\dagger$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم

$$AA^\dagger = UDVV^\dagger D^\dagger U^\dagger = UDD^\dagger U^\dagger.$$

توجه کنید که $DD^\dagger$ ماتریسی مربعی و قطری است. در نتیجه مقادیر ویژه‌ی $AA^\dagger$ همان مقادیر تکین A به توان دو هستند (بصورت دقیق تر این گزاره در مورد ماتریس های مربعی A و D درست است. در صورتی که ماتریس D قطری مستطیلی باشد، مقادیر روی قطر $DD^\dagger$ همان مقادیر روی قطر D به توان دو، بعلاوه تعدادی صفر خواهد بود). همچنین ستون‌های U یک پایه‌ی متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی $AA^\dagger$ تشکیل می‌دهند. به طور مشابه داریم

$$A^\dagger A = V^\dagger D^\dagger U^\dagger UDV = V^\dagger D^\dagger DV.$$

اثبات: با استفاده از قضیه‌ی تجزیه‌ی قطبی می‌توانیم قضیه تجزیه مقدارهای منفرد را اثبات کنیم.

A را ماتریسی دلخواه بگیرید و تجزیه‌ی قطبی آن را $A = UP$ بگیرید. از آنجا که P مثبت نیمه معین و در نتیجه هرمیتی است در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری می‌شود. یعنی ماتریس قطری D و ماتریس یکانی V وجود دارند به طوری که $P = V^\dagger DV$. در این صورت

$$A = UV^\dagger DV.$$

اگر $U' = UV^\dagger$ را تعریف کنیم U' ماتریسی یکانی خواهد بود و

$$A = U'DV.$$

اثبات تمام شد. □

با یک مثال ادامه میدهیم

مثال ۴۹ ماتریس‌های U و V در تجزیهٔ مقدارهای منفرد یکتا نیستند. مثلا ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

یکی از تجزیهٔ مقدارهای منفرد این ماتریس به صورت زیر است:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0.8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.2} \end{pmatrix}$$

U و V یکانی هستند. مثلا

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

و داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{0.8} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.2} \end{pmatrix}$$

اما تجزیه دیگر این ماتریس عبارت از $A = UDV'$ که در آن

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{0.8} \\ \sqrt{0.4} & 0 & 0 & \sqrt{0.5} & -\sqrt{0.1} \\ -\sqrt{0.4} & 0 & 0 & \sqrt{0.5} & \sqrt{0.1} \end{pmatrix}.$$

تمرین ۵۰ ثابت کنید که بزرگترین مقدار تکین یک ماتریس دلخواه جواب مساله بهینه سازی زیر است:

$$d_{\max} = \max_{\langle v|v\rangle = 1} \|A|v\rangle\|$$

یا به عبارت دیگر ماکزیمم طول $A|v\rangle$ برای تمامی بردارهای به طول یک $|v\rangle$ است. مشابها ثابت کنید که کوچکترین مقدار تکین یک ماتریس دلخواه جواب مساله بهینه سازی زیر است:

$$d_{\min} = \min_{\langle v|v\rangle = 1} \|A|v\rangle\|$$

برای بقیه مقادیر تکین یک ماتریس نیز تفاسیر از این دست وجود دارد.

قضیه‌ی زیر بیان دیگری از قضیه بالا است که در آن ماتریس D مربعی می‌باشد و اندازه‌ی آن همان رتبه ماتریس A است. اما ماتریس های U و V مربعی نیستند (و در نتیجه وارون‌پذیر و یکانی نیستند).

قضیه ۵۱ برای هر ماتریس (نه لزوما مربعی) $A_{m\times n}$ با رتبه ℓ، ماتریس‌های $U_{m\times\ell}$، $D_{\ell\times\ell}$ و $V_{\ell\times n}$ وجود دارند که D قطری است و $D > 0$ (یعنی همه اعضای روی قطر آن حقیقی و مثبت هستند) و $U^\dagger U = I_\ell = VV^\dagger$ و

$$A = UDV.$$

این قضیه از قضیه‌ی قبلی نتیجه می‌شود اگر فقط درایه‌های مثبت ماتریس D در بالا را در نظر بگیریم و روی آنها عبارت را بسط دهیم.