مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

# جلسه ۳

---

جلسه‌ی گذشته دیدیم که بردارهای یک پایه‌ی متعامد یکه با «کت‌ها» $|v\rangle$ نمایش داده می‌شوند که به نوعی متناظر با بردارهای ستونی هستند. یک «برا» $\langle v| = |v\rangle^\dagger$ متناظر با ترانهاده مزدوج بردار ستونی است و لذا می‌توان آن را به عنوان یک بردار سطری در نظر گرفت. با در نظر گرفتن چنین تناظری $\langle v|\omega\rangle$ یک عدد است و از حاصلضرب یک بردار سطری در یک بردار ستونی به دست می‌آید و همان ضرب داخلی بردارهای $|v\rangle$ و $|\omega\rangle$ است. به طور دقیق‌تر اگر برای پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ داشته باشیم

$$|v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |v_i\rangle$$

و

$$|\omega\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i |v_i\rangle$$

آنگاه

$$\langle v|\omega\rangle = (\alpha_0^*, \dots, \alpha_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix}.$$

به طور مشابه $|v\rangle\langle\omega|$ متناظر با حاصلضرب یک بردار ستونی در یک بردار سطری است و لذا یک ماتریس است. نمایش این ماتریس در پایه‌ی $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ برابر است با

$$|v\rangle\langle\omega| = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} (\beta_0^*, \beta_1^* \dots, \beta_{d-1}^*) = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0^* & \alpha_0\beta_1^* & \dots & \alpha_0\beta_{d-1}^* \\ \alpha_1\beta_0^* & \alpha_1\beta_1^* & \dots & \alpha_1\beta_{d-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d-1}\beta_0^* & \alpha_{d-1}\beta_1^* & \dots & \alpha_{d-1}\beta_{d-1}^* \end{pmatrix}.$$

### یک خاصیت مفید پایه‌های متعامد یکه:

در این مثال با عملیات جبری به رابطه‌ای مفید می‌رسیم. با همان پایه متعامد یکه قبلی ادامه می‌دهیم. جلسه‌ی قبل دیدیم که $\alpha_i = (|v_i\rangle, |v\rangle)$. در نتیجه:

$$|v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \langle v_i|v\rangle |v_i\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \langle v_i||v\rangle |v_i\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} |v_i\rangle\langle v_i||v\rangle = \left(\sum_{i=0}^{d-1} |v_i\rangle\langle v_i|\right)|v\rangle.$$

در نتیجه $I = \sum_{i=0}^{d-1} |v_i\rangle\langle v_i|$ ماتریس همانی است! یعنی برای هر پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ می‌توان ماتریس $I$ را به صورت زیر نوشت

$$I = \sum_{i=0}^{d-1} |v_i\rangle\langle v_i|.$$

**مثال ۱** فضای برداری $\mathbb{C}^2$ را با ضرب داخلی معمول آن در نظر بگیرید. در این صورت دو بردار

$$|v_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه تشکیل می‌دهند و داریم

$$|v_0\rangle\langle v_0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |v_1\rangle\langle v_1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$|v_0\rangle\langle v_0| + |v_1\rangle\langle v_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

حال فرض کنید که پایه‌ی متعامد یکه‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$|\omega_0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad |\omega_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

در این صورت

$$|\omega_0\rangle\langle \omega_0| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$|\omega_1\rangle\langle \omega_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

که دوباره جمع آنها ماتریس همانی میشود.

**تمرین ۲** $M_n(\mathbb{C})$ را مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط بگیرید. نشان دهید که $M_n(\mathbb{C})$ یک فضای برداری است.

**تمرین ۳** فرض کنید که $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ و $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ دو پایه‌ی دلخواه برای $\mathbb{C}^n$ باشند. نشان دهید

$$\{|v_i\rangle\langle e_j| : \quad 1 \leq i, j \leq n\}$$

یک پایه برای $M_n(\mathbb{C})$ است و نتیجه بگیرید که بعد این فضا برابر $n^2$ است.

در ادامه به مرور مفاهیمی از آنالیز ماتریس‌ها می‌پردازیم.

## ۱ ضرب ماتریسی و تفاسیر آن

فرض کنید که $A$ یک ماتریسی دلخواه و $|v\rangle$ یک بردار ستونی باشد. ضرب یک بردار از سمت چپ در $A$ یا $\langle v|A$ همانند محاسبه ترکیب خطی‌ای از سطرهای $A$ می‌باشد که مولفه‌های $\langle v|$ وزن این ترکیب خطی را مشخص می‌کنند. اما ضرب از سمت راست یا $A|v\rangle$ همانند محاسبه ترکیب خطی‌ای از ستون‌های ماتریس $A$ است. در صورتی که ماتریس $A$ وارون‌پذیر باشد، ضرب $A|v\rangle$ را می‌توان به عنوان تغییر مختصات از یک پایه به یک پایه دیگر نیز تفسیر کرد. بعدها که عملگرهای خطی را تعریف می‌کنیم می‌بینیم که ضرب از سمت راست یا $A|v\rangle$ همانند محاسبه اثر عملگر $A$ بر روی بردار $|v\rangle$ نیز هست.

روابط بالا نشان می‌دهند که اگر ستون‌های یک ماتریس مستقل خطی نباشند، بردار ناصفر $|v\rangle$ را می‌توان یافت به طوری که $A|v\rangle = 0$. بنابراین هر عملگر خطی که ستون‌های نمایش ماتریسی‌اش وابسته خطی باشند حتما یک بردار غیرصفر را به صفر می‌برد.

برای ضرب دو ماتریس نیز می‌توان چند تفسیر ارائه داد که تمامی آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرض کنید که $B$ یک ماتریس دلخواه باشد. اگر ستون‌های این ماتریس را به ترتیب با بردارهای ستونی $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_k\rangle$ نشان دهیم:

$$B = \Big[|v_1\rangle,\ |v_2\rangle,\ |v_3\rangle,\ \cdots,\ |v_k\rangle\Big]$$

در این صورت ضرب ماتریسی $AB$ را میتوان به این شکل نوشت:

$$AB = \Big[A|v_1\rangle,\ A|v_2\rangle,\ A|v_3\rangle,\ \cdots,\ A|v_k\rangle\Big]$$

یعنی ماتریس $A$ روی ستون های $B$ به صورت مجزا عمل می‌کند.

**مثال ۴** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

پس در این مثال $k = 2$ و

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

حال توجه کنید که

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ستون اول این ماتریس برابر $A|v_1\rangle$ است و ستون دوم آن برابر $A|v_2\rangle$.

## ۲ عملیات سطری مقدماتی

عملیات سطری مقدماتی شامل سه عمل زیر است:

• جابجایی دو سطر با یکدیگر

$$R_i \leftrightarrow R_j, \qquad i \neq j$$

اگر سطرهای $i$-ام و $j$-ام ماتریس $A$ را با هم جابجا کنیم ماتریس حاصل برابر خواهد با $\Gamma_{ij}A$ که در آن ماتریس $\Gamma_{ij}$ همان ماتریس همانی است که سطر $i$ و $j$-اش جابجا شده است:

$$\Gamma_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که هر سطر ماتریس $\Gamma_{ij}A$ ترکیب خطی‌ای از سطرهای $A$ است، و این ترکیب‌های خطی برای سطرهای مختلف زیر هم قرار می‌گیرند. در ضمن $\Gamma_{ij}$ ماتریسی وارون پذیر است: $\Gamma_{ij}^{-1} = \Gamma_{ij}$ زیرا $\Gamma_{ij}\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^2 = I$ است. یعنی اگر سطر های $i$ و $j$ را دو بار جابجا کنیم همان ماتریس اول بدست می آید!

• ضرب درایه‌های یک سطر در یک عدد ناصفر

$$R_i \to aR_i, \qquad a \neq 0$$

با ضرب سطر $i$-ام ماتریس $A$ در عدد ناصفر $a \neq 0$، ماتریس $\Gamma_i(a)A$ را به دست می‌آوریم که در آن

$$\Gamma_i(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

در ضمن $\Gamma_i(a)$ ماتریسی وارون پذیر است: $\Gamma_i(a)^{-1} = \Gamma_i(\frac{1}{a})$

• جایگزینی یک سطر با مجموع آن سطر و ضریبی از سطر دیگر

$$R_i \to R_i + aR_j, \qquad i \neq j, a \neq 0$$

چنین عملی روی ماتریس $A$ ماتریس $\Gamma_{ij}(a)A$ را بدست می‌دهد که در آن

$$\Gamma_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & a & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

داریم: $\Gamma_{ij}(a)^{-1} = \Gamma_{ij}(-a)$

انجام عملیات سطری مقدماتی مانند ضرب در ماتریسی وارون پذیر از سمت چپ است.

با استفاده از عملیات سطری مقدماتی میتوان یک ماتریس را به شکل سطری پلکانی در آورد که دارای این خواص است: $(1)$ تمام سطر هایی که تماما صفر هستند در ردیف های پایین قرار میگیرند $(2)$ اولین عدد ناصفر هر سطر همیشه اکیدا در سمت راست اولین عدد ناصفر سطر بالایی اش قرار میگیرد $(3)$ اگر اولین عدد ناصفر در هر سطر را در نظر بگیریم، این عدد برابر یک است و بعلاوه در ستون مربوط به این عدد، تمامی درایه‌های برابر صفر هستند. نمونه ای از یک ماتریس سطری پلکانی در شکل زیر آورده شده است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عملیات ستونی مقدماتی به طور مشابه تعریف می‌شوند. انجام عملیات ستونی مقدماتی متناظر با ضرب در ماتریسی وارون پذیر از سمت راست است. ماتریس‌های متناظر اعمال ستونی مقدماتی را با نمادهای $\Lambda_{ij}$، $\Lambda_i(a)$ و $\Lambda_{ij}(a)$ نشان می‌دهیم.

## ۳ زیرفضای پوچ یک ماتریس

برای ماتریس دلخواه $A$، زیرفضای پوچ آن را مجموعه‌ی بردارهای $|v\rangle$ تعریف می‌کنیم که $A|v\rangle = 0$.

$$\ker A = \{|v\rangle : \quad A|v\rangle = 0\}.$$

**تمرین ۵** نشان دهید $kerA$ همواره یک زیرفضای برداری است.

با توجه به این تمرین می‌توان صحبت از بعد فضای پوچ یک ماتریس کرد($\dim(\ker A)$). اگر یک ماتریس وارون پذیر باشد، فضای پوچش تنها شامل بردار صفر است و بعد فضای پوچ آن برابر صفر.

**تمرین ۶** فضای پوچ ماتریس زیر را بدست بیاورید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

## ۴ رتبه‌ی ماتریس

رتبه یک ماتریس برابر ماکزیمم تعداد «سطرهای» مستقل خطی آن است. معادلا رتبه یک ماتریس برابر بعد فضای برداری تولید شده توسط سطرها میباشد. همچنین رتبه یک ماتریس برابر با ماکزیمم تعداد «ستون‌های» مستقل خطی آن نیز هست. توجه کنید که این خاصیت برای هر ماتریسی و نه فقط ماتریس‌های مربعی برقرار است. جهت اثبات ابتدا توجه کنید که اعمال سطری مقدماتی رتبه‌ی سطری و یا ستونی یک ماتریس را تغییر نمی‌دهند. با انجام عملیات سطری مقدماتی میتوان ماتریس را بشکل سطری مقدماتی در آورد که در این صورت مشاهده اینکه رتبه سطری و ستونی برابر هستند کار آسانی است.

رتبه‌ی ماتریس $A$ با $\text{rank}A$ نمایش داده می‌شود.

**تمرین ۷** تحقیق کنید که هر ماتریس با رتبه یک به شکل $|v\rangle\langle\omega|$ است.

**برخی خواص رتبه یک ماتریس:**

فرض کنید که $A$ یک ماتریس با $m$ سطر و $n$ ستون باشد (ماتریس $m \times n$).

- روابط زیر معادلند:

  (۱) $\text{rank}(A) = k$

  (۲) $k$ سطر از ماتریس $A$ (و نه بیشتر از آن) وجود دارند که مستقل خطی هستند.

  (۳) $k$ ستون از ماتریس $A$ (و نه بیشتر از آن) وجود دارند که مستقل خطی هستند.

  (۴) یک زیرماتریس $k \times k$ وجود دارد که وارون‌پذیر است، و هیچ زیرماتریس $(k+1) \times (k+1)$ وارون پذیر نیست.

  (۵) بعد فضای پوچ $A$ برابر $n-k$ است (اثبات این موضوع در جلسه بعد آورده می‌شود).

  (۶) بعد زیرفضای تولید شده توسط سطرهای $A$ برابر $k$ است.

  (۷) بعد زیرفضای تولید شده توسط ستون‌های $A$ برابر $k$ است.

- ماتریس $A$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر مربعی باشد ($m = n$) و رتبه‌ی آن کامل باشد $k = n$.

- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t) = \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A^\dagger)$

- اگر $A$ را در یک ماتریس مربعی وارون پذیر ضرب کنیم (از هر طرفی)، رتبه آن تغییر نمی‌کند.

- اگر $A$ مربعی باشد، از آنجایی که $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger)$، مشاهده می‌کنیم که بعد فضای پوچ $A$ و $A^\dagger$ یکسان است.

- یکی دیگر از خواص رتبه که آن را در اینجا ثابت می‌کنیم به شرح زیر است:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^\dagger) = \text{rank}(A^\dagger A).$$

**اثبات:** $\text{rank}A = \text{rank}A^\dagger A$ را ثابت می‌کنیم. اثبات $\text{rank}A = \text{rank}AA^\dagger$ مشابه است. از آنجایی که تعداد ستون‌هایی $A$ و $A^\dagger A$ یکسان است، جهت اثبات برابری رتبه دو ماتریس کافی است نشان دهیم بعد فضای پوچ آنها برابر است. در اینجا در واقع ثابت می‌کنیم که فضای پوچ دو ماتریس $A$ و $A^\dagger A$ دقیقا با هم مساوی است. فرض کنید که

$$A|v\rangle = 0 \quad \Longrightarrow A^\dagger A|v\rangle = 0$$

پس

$$\ker(A) \subseteq \ker(A^\dagger A)$$

برعکس فرض کنید

$$\begin{aligned} A^\dagger A|v\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \langle v|A^\dagger A|v\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow (\langle v|A^\dagger)(A|v\rangle) = 0 \\ &\Longrightarrow (A|v\rangle)^\dagger(A|v\rangle) = 0 \\ &\Longrightarrow (A|v\rangle,\ A|v\rangle) = 0 \\ &\Longrightarrow \|A|v\rangle\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow A|v\rangle = 0. \end{aligned}$$

پس

$$\ker(A^\dagger A) \subseteq \ker(A)$$

اثبات کامل است. $\square$

- برای ماتریس $A$ با سایز $n \times k$ و ماتریس $B$ با سایز $k \times m$ داریم:

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)).$$

برای اثبات $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ دقت کنید که همواره

$$\ker(B) \subseteq \ker(AB)$$

چون

$$B|v\rangle = 0 \quad \Longrightarrow AB|v\rangle = 0.$$

(تکمیل کردن اثبات به عهده خواننده است.)

- برای دو ماتریس دلخواه $A$، $B$ داریم:

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

**اثبات:** ماتریس $C$ را با زیر هم گذاشتن ماتریس های $A$ و $B$ میسازیم.

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

در این صورت چون رتبه برابر فضای برداری تولید شده توسط سطرهای یک ماتریس است، داریم:

$$\text{rank}(C) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

اما چون سطرهای $A+B$ ترکیب خطی سطرهای $C$ هستند، پس فضای تولید شده توسط سطرهای $A+B$ زیر مجموعه فضای تولید شده توسط سطرهای $C$ میباشد. پس

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(C).$$

□

**تمرین ۸** تحقیق کنید که هر ماتریس به شکل $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i |\omega_i\rangle\langle v_i|$ که در آن $\alpha_i$ یک عدد مختلط دلخواه است دارای رتبه‌ی حداکثر $r$ می‌باشد. بعدها خواهیم دید که هر ماتریس با رتبه‌ی $r$ را می‌توان به صورت فوق نوشت.

**تمرین ۹** فرض کنید $X$ یک ماتریس وارون‌پذیر باشد. نشان دهید $rank(XA) = rank(AX) = rank A$. نتیجه بگیرید که اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی رتبه‌ی یک ماتریس را تغییر نمی‌دهند.

از اعمال سطری مقدماتی می‌توان برای محاسبه‌ی رتبه‌ی یک ماتریس استفاده کرد. با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

اعمال سطری مقدماتی ماتریس زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_{32}(2)} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_{21}(1)} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_{42}(1)} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_{12}(-1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_{2}(-1)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

همچنین با اعمال ستونی مقدماتی به ترتیب $\Lambda_{31}(-1)$، $\Lambda_{41}(-2)$، $\Lambda_{32}(-2)$، و در انتها $\Lambda_{42}(-1)$ به ماتریس زیر می‌رسیم:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

که به طور خلاصه آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

در واقع اگر قرار دهیم

$$X = \Gamma_2(-1)\Gamma_{21}(-1)\Gamma_{42}(1)\Gamma_{21}(1)\Gamma_{32}(2)$$

و

$$Y = \Lambda_{31}(-1)\Lambda_{41}(-2)\Lambda_{32}(-2)\Lambda_{42}(-1)$$

آنگاه داریم

$$\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = XAY.$$

رتبه‌ی این ماتریس به وضوح برابر 2 است و لذا $\mathrm{rank}A = 2$.

به طور کلی فرض کنید که یک ماتریس با رتبه $r$ داشته باشیم. در این صورت با انجام عملیات سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی میتوان تمام ستون‌های ماتریس را بجز $r$ ستون اول، و تمامی سطرهای ماتریس را بجز $r$ سطر اول صفر کرد. اما انجام عملیات سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مانند ضرب ماتریس در دو ماتریس از دو طرف است. پس ماتریس های وارون پذیر $U$، $W$ و ماتریس وارون پذیر مربعی $G: r \times r$ وجود دارند به طوری که

$$UAW = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

می‌توان با انجام عملیات سطری و ستونی مقدماتی بیشتر ماتریس $G$ را قطری نیز کرد. در این صورت به تجزیه زیر می‌رسیم که از تجزیه بالا کمی بهتر است:

$$A = X^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1}.$$

**نتیجه:** یک ماتریس با رتبه یک همواره بشکل $|x\rangle\langle y|$ برای بردار ستونی $|x\rangle$ و بردار سطری $\langle y|$ میباشد.

**تمرین ۱۰** فرض کنید $A$ یک ماتریس با رتبه‌ی $r$ باشد. رتبه‌ی دو ماتریس زیر را بر حسب $r$ بیابید.

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

## ۵ فرمولی جالب برای وارون یک ماتریس

فرض کنید که ماتریسی داریم که به چند زیرماتریس به شکل زیر تجزیه شده است.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})^{-1} \\ (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix}$$

برای این درس نیازی به حفظ این فرمول نیست، اما دانستن وجود آن می‌تواند در تحقیقات به شما کمک کند.

فرمول جالب دیگر این است که اگر برای ماتریس وارون پذیر $B : n \times n$، ماتریس های $X : n \times r$، $Y : r \times n$ و ماتریس وارون پذیر $G : r \times r$ داشته باشیم

$$A = B + XGY$$

در این صورت

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1}X(G^{-1} + YB^{-1}X)^{-1}YB^{-1}$$

در حالت خاص $r = 1$، $G = [1]$ اگر

$$A = B + |x\rangle\langle y|$$

در این صورت

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{1+\langle y|B^{-1}|x\rangle} B^{-1}|x\rangle\langle y|B^{-1}$$

این فرمول به ما این امکان را میدهد که بررسی کنیم که اگر به ماتریس $B$ یک ماتریس با رتبه یک اضافه کنیم چه تغییری در وارونش اتفاق می افتد.

حالت خاص فرمول بالا با قرار دادن $B = I$ به دست می‌آید:

$$A = I + |x\rangle\langle y|$$

در این صورت

$$A^{-1} = I - \frac{1}{1+\langle y|x\rangle} |x\rangle\langle y|$$

تا زمانی که ضرب داخلی $\langle y|x\rangle$ مساوی $-1$ نباشد. درستی این رابطه را بصورت مستقیم تحقیق کنید.

## ۶ اثر یک ماتریس

اثر[۱] یک ماتریس مربعی جمع درایه های روی قطر آن است. اگر درایه‌ی $ij$ ماتریس $A$ با سایز $n \times n$ را با $a_{ij}$ نشان دهیم آنگاه

$$\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

به عنوان مثال اثر ماتریس

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

برابر $-2+1-5=-6$ است. اثر یک ماتریس دارای خواص زیر است.

- $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
- $\operatorname{tr}(cA) = c \cdot \operatorname{tr}(A)$
- $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(A)$
- $\operatorname{tr}(A^{\dagger}) = \operatorname{tr}(A)^{*}$

اما یک رابطه مهم و کاربردی: برای هر دو ماتریس دلخواه $A$ و $B$ (نه لزوما مربعی) در صورتی که ماتریس های $AB$ و $BA$ هر دو مربعی باشند

- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

[۱] Trace

**تمرین ۱۱** روابط فوق را اثبات کنید

**مثال ۱۲** محاسبه اثر یک ماتریس با رتبه $1$ کار آسانی است. با استفاده از رابطه‌ی $tr(AB) = tr(BA)$ داریم

$$tr(|x\rangle\langle y|) = tr(\langle y||x\rangle) = tr(\langle y|x\rangle) = \langle y|x\rangle$$

ابتدا توجه کنید که $\langle y|$ ترانهاده مزدوج بردار $|y\rangle$ میباشد اما این موضوع در جابجایی‌اش تاثیری نمی‌گذارد زیرا ماتریس $\langle y|$ به همان شکل اولیه $|y\rangle$ به سمت دیگر آورده شده است. همچنین مشاهده کنید که $\langle y|x\rangle$ یک ماتریس $1 \times 1$ است و در نتیجه اثرش برابر خودش است.

در حالت کلی‌تر وقتی چند ماتریس داریم می‌توانیم به صورت دوری جای ماتریس‌ها را عوض کنیم.

$$\mathrm{tr}(ABCD) = \mathrm{tr}(BCDA) = \mathrm{tr}(CDAB) = \mathrm{tr}(DABC).$$

اما جایگشت دادن ماتریس ها مجاز نیست: یعنی در حالت کلی

$$\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB).$$

**تمرین ۱۳** تابع $(\cdot,\cdot) : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ را به صورت

$$(A, B) := tr(A^{\dagger}B)$$

تعریف کنید. نشان دهید $(\cdot,\cdot)$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری $M_n(\mathbb{C})$ القا می‌کند.

**تمرین ۱۴** فرض کنید $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ و $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ دو پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathbb{C}^n$ باشند. نشان دهید

$$\{|v_i\rangle\langle e_j| : \quad 1 \leq i, j \leq n\}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای $M_n(\mathbb{C})$ است.

## ۷ دترمینان

اگر $A$ ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های $a_{ij}$ باشد دترمینان آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}, \tag{۱}$$

که در آن $\mathcal{S}_n$ مجموعه‌ی جایگشت‌های روی $\{1, 2, \dots, n\}$ است و منظور از $sgn(\pi)$ علامت جایگشت $\pi$ است. در اینجا به جزییات این تعریف نیاز نداریم. آنچه نیاز داریم این است که برای محاسبه‌ی دترمینان می‌توان از روش بسط نسبت به یک سطر و یا یک ستون استفاده کرد. به طور مثال از چنین بسطی نتیجه می‌شود که دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی (و همچنین قطری) برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر آن است. برای جزییات بیشتر در مورد تعریف دترمینان به ویکی‌پدیا مراجعه کنید.

**مثال ۱۵** دترمینان یک ماتریس $3 \times 3$ حاوی جملات ضربی مربوط به جایگشتها است که با علامت مثبت یا منفی با هم جمع شده اند:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

**مثال ۱۶** فرض کنید $A$ ماتریس بالا مثلثی باشد. یعنی همه درایه‌های زیر قطر آن صفر باشند:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

در این صورت تنها جایگشتی که به ازای آن درایه‌ای ناصفر در بسط (۱) ظاهر نمی‌شود، جایگشت همانی است ($\pi(i) = i$). در نتیجه داریم

$$\det A = a_{11} \dots a_{nn}.$$

یعنی دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی (و همچنین قطری) برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر آن است. این خاصیت را از بسط دترمینان برحسب سطرها یا ستون‌ها نیز می‌توان ثابت کرد.

نکته‌ی مهم دیگری که مورد استفاده قرار می‌گیرد تساوی

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

است. از این رابطه و $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$ نتیجه می‌شود که اگر $A$ وارون پذیر باشد آنگاه

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

پس دترمینان یک ماتریس وارون‌پذیر ناصفر است.

با استفاده از رابطه‌ی فوق و اعمال سطری مقدماتی می‌توان دترمینان یک ماتریس را محاسبه کرد. فرض کنید روی ماتریس $A$ عمل سطری مقدماتی $\Gamma_{ij}$ را انجام دهیم. حاصل ماتریس $A' = \Gamma_{ij} A$ می‌شود. پس $A = \Gamma_{ij} A'$ و

$$\det A = (\det \Gamma_{ij})(\det A') = -\det A'.$$

حال می‌توان اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی دیگری روی ماتریس $A'$ انجام داد و در هر مرحله از روابط زیر استفاده کرد.

$$\det \Gamma_{ij} = \det \Lambda_{ij} = -1,$$

$$\det \Gamma_i(a) = \det \Lambda_i(a) = a,$$

$$\det \Gamma_{ij}(a) = \det \Lambda_{ij}(a) = 1,$$

به طور دقیق‌تر دیدیم که برای هر ماتریس $A$ با رتبه‌ی $r$ ماتریس‌های $X$ و $Y$ وجود دارند که

$$A = X^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1},$$

و در آن $X$ از حاصلضرب ماتریس‌های $\Gamma$ متناظر با اعمال سطری مقدماتی به دست می‌آید، و $Y$ برابر حاصلضرب ماتریس‌های $\Lambda$ متناظر با اعمال ستونی مقدماتی است. در نتیجه

$$\det A = (\det X)^{-1} \left(\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) (\det Y)^{-1}.$$

می‌دانیم اگر $r < n$ آنگاه

$$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

بنابراین $\det A \neq 0$ اگر و فقط اگر $\text{rank}A = n$ که در این صورت $A = X^{-1}Y^{-1}$. پس قضیه‌ی زیر ثابت شد.

**قضیه ۱۷** ماتریس $A$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

اما این قضیه را با استفاده از فرمول کرامر برای ماتریس وارون نیز میتوان مشاهده کرد:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

که $C_{ij}$کهاد $ij$ ام ماتریس $A$ بوده که با محاسبه دترمینان ماتریسی مربعی که از حذف سطر $i$-ام و ستون $j$-ام ماتریس $A$ بدست می آید.

**تمرین ۱۸** فرض کنید $A$ یک ماتریس $2 \times 2$ باشد. نشان دهید $\det A = \left((trA)^2 - tr(A^2)\right)/2$.

## ۸ مقادیر ویژه

برداری ناصفر $|v\rangle$ یک بردار ویژه[۲] ماتریس $A$ می‌نامیم اگر $A|v\rangle$ ضریبی از $|v\rangle$ باشد. به عبارت دیگر عدد $\lambda$ وجود داشته باشد به طوری که

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle$$

یا

$$(A - \lambda I)|v\rangle = 0. \qquad (۲)$$

در این صورت $\lambda$ را یک مقدار ویژه[۳] ماتریس $A$ می‌نامند. توجه کنید که مسأله‌ی بردار ویژه و مقدار ویژه فقط برای ماتریس‌های مربعی با معنی است.

---

[۲] Eigenvector
[۳] Eigenvalue

به عنوان مثال اگر فضای پوچ $A$ ناصفر باشد $\ker A \neq 0$، یعنی بردار ناصفر $|v\rangle \in \ker A$ وجود داشته باشد آنگاه طبق تعریف داریم $A|v\rangle = 0$ . بنابراین $|v\rangle$ یک بردار ویژه‌ی $A$ با مقدار ویژه‌ی $0$ است. در واقع $0$ مقدار ویژه‌ی $A$ اگر و فقط اگر $\ker A \neq 0$ و یا به طور معادل $A$ وارون‌پذیر نباشد.

چنین تناظری نه فقط برای مقدار ویژه‌ی $0$ بلکه برای هر مقدار ویژه‌ی $\lambda$ برقرار است. با توجه به رابطه‌ی (۲) بردار $|v\rangle$ بردار ویژه‌ی $A$ با مقدار ویژه‌ی $\lambda$ است اگر و فقط اگر $|v\rangle$ بردار ویژه‌ی $A - \lambda I$ با مقدار ویژه‌ی $0$ باشد. نتیجه می‌گیریم که $\lambda$ مقدار ویژه‌ی $A$ است اگر و فقط اگر $A - \lambda I$ وارون‌پذیر نباشد.

دیدیم که یک ماتریس وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر دترمینان آن ناصفر باشد. بنابراین $\lambda$ مقدار ویژه‌ی $A$ است اگر

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

به عبارت دیگر مقادیر ویژه‌ی $A$ ریشه‌های $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ هستند. اگر این دترمینان را بسط بدهیم به معادله ای بر حسب $\lambda$ می‌رسیم که چندجمله‌ای مشخصه (یا معادله مشخصه) نام دارد توجه کنید که درجه‌ی این چند جمله‌ای برابر $n$ است که در آن $n \times n$ سایز ماتریس $A$ است.

**تمرین ۱۹** نشان دهید که یک ماتریس $n \times n$ حداکثر $n$ مقدار ویژه دارد.

**مثال ۲۰** مقادیر ویژه‌ی ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

پس مقادیر ویژه‌ی $A$ برابرند با $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$. همچنین بردارهای ویژه متناظر با این مقاریر ویژه برابرند با

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

خواهیم دید که بردارهای ویژه و مقادیر ویژه نقشی اساسی در فهم ما از ماتریس‌ها بازی می‌کنند. اما مفاهیم مربوط به آن در مسائل بهینه سازی نیز خود را نشان می‌دهند. یک بردار دلخواه $|v\rangle$ را در نظر بگیرید. در این صورت ضرب داخلی میان دو بردار $A|v\rangle$ و $|v\rangle$ بیانگر نحوه رفتار $A$ است. این ضرب داخلی عبارت است از $\langle v|A|v\rangle = (|v\rangle, A|v\rangle)$. فرض کنید که یک ماتریس «حقیقی متقارن» $A$ داریم و علاقمند هستیم که از میان تمامی بردارهای حقیقی $|v\rangle$ با طول واحد، برداری را بیابیم که $\langle v|A|v\rangle$ ماکزیمم باشد.

$$\text{ماکزیمم } \langle v|A|v\rangle \text{ بشرط } \langle v|v\rangle = 1$$

در این صورت اگر از روش ضرایب لاگرانژ استفاده کنیم باید عبارت

$$\langle v|A|v\rangle - \lambda\langle v|A|v\rangle$$

را تشکیل دهیم. پس از مشتق‌گیری پاره ای نسبت به مولفه‌های $|v\rangle$ و محاسبه گرادیان به رابطه $2(A|v\rangle - \lambda|v\rangle) = 0$ میرسیم (در اینجا از متقارن بودن ماتریس استفاده کردیم، وگرنه مشتق چیز دیگری می‌شد). این رابطه شرطی لازم برای جواب مساله بهینه‌سازی است. در صورتی که ماتریس $A$ متقارن باشد جواب مساله بهینه سازی بالا برابر بزرگترین مقدار ویژه‌ی $A$ است.

دیدیم که مقادیر ویژه یک ماتریس $A$ با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

اگر ماتریس $A$ بالا مثلثی باشد (درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفر باشند) داریم:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

بنابراین چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از

$$\det(A-\lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{aligned} &= \det\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2}-\lambda & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{1,1}-\lambda)(a_{2,2}-\lambda)\cdots(a_{n,n}-\lambda) = 0. \end{aligned}$$

**نتیجه:** در هر ماتریس بالا مثلثی، مقادیر ویژه همان مقادیر روی قطر هستند. بطور خاص در هر ماتریس قطری نیز مقادیر روی قطر همان مقادیر ویژه هستند. مشابه این گزاره در مورد ماتریس های پایین مثلثی هم برقرار است.

**تمرین ۲۱** به صورت مستقیم نشان دهید که اگر $0$ یکی از مقادیر روی قطر یک ماتریس بالا مثلثی باشد، آنگاه سطرهای ماتریس و (همچنین ستون های آن) بردارهایی وابسته خطی خواهند بود (و در نتیجه فضای پوچ آن ناصفر است).

توجه کنید که جمع و ضرب ماتریس‌های بالا مثلثی همواره بالا مثلثی است (در نتیجه یک ماتریس بالا مثلثی به توان دو، به توان سه، ... نیز ماتریسی بالا مثلثی است). اگر درایه های روی قطر یک ماتریس بالا مثلثی همگی صفر باشند، تمامی مقادیر ویژه این ماتریس برابر صفر هستند. اما این ماتریس لزوما متحد با صفر نیست (یعنی همه درایه هایش صفر نیست). بنابراین ماتریس های بالا مثلثی می‌توانند گزینه‌های خوبی برای ساختن مثال نقض برای گزاره‌هایی باشند که ممکن است حدس بزنیم که درست هستند.

**تمرین ۲۲** اگر جمع درایه های هر سطر یک ماتریس برابر یک باشد، آنوقت $1$ مقدار ویژه آن ماتریس است.
راهنمایی: بردار $|v\rangle$ که تمامی مولفه‌هایش $1$ هستند را در نظر بگیرید.

**تمرین ۲۳** اگر جمع درایه های هر ستون یک ماتریس برابر یک باشد، آنوقت $1$ مقدار ویژه آن ماتریس است.

**تمرین ۲۴** فرض کنید که جمع درایه های هر ستون یک ماتریس برابر $1$ باشد. . فرض کنید که $\lambda \neq 1$ یک مقدار ویژه این ماتریس باشد و $|\omega\rangle$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه‌ی $\lambda$ باشد. ثابت کنید که جمع درایه های $|\omega\rangle$ برابر صفر است.

### مقدار ویژه و توابع یک ماتریس

اگر $\lambda$ مقدار ویژه‌ی ماتریس $A$ باشد متناظر با بردار ویژه‌ی $|v\rangle$، آنگاه $\lambda^2$ مقدار ویژه ماتریس $A^2$ است زیرا

$$A^2|v\rangle = A(A|v\rangle) = A\left(\lambda|v\rangle\right) = \lambda A|v\rangle = \lambda^2|v\rangle$$

می‌بینیم که بردار ویژه‌ی مربوطه تغییری نکرده است، ولی مقدار ویژه به توان $2$ رسیده. در حالت کلی

**قضیه ۲۵** اگر $\lambda$ مقدار ویژه‌ی ماتریس $A$ باشد، آنگاه برای هر چندجمله ای $f$، $f(\lambda)$ مقدار ویژه ماتریس $f(A)$ با همان بردار ویژه است.

**اثبات:** فرض کنید

$$f(A) = \sum_{i=0}^{r} c_i A^i = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_r A^r$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f(A)|v\rangle &= \sum_{i=0}^{r} c_i A^i|v\rangle = c_0|v\rangle + c_1 A|v\rangle + c_2 A^2|v\rangle + \cdots + c_r A^r|v\rangle \\ &= c_0|v\rangle + c_1\lambda|v\rangle + c_2\lambda^2|v\rangle + \cdots + c_r\lambda^r|v\rangle \\ &= \big(c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_r\lambda^r\big)|v\rangle \\ &= f(\lambda)|v\rangle \end{aligned}$$

□

**تمرین ۲۶** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A^{-1}$ را برحسب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس وارون‌پذیر $A$ بیابید.

**تمرین ۲۷** فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی باشد و $A^2 = A$. چنین ماتریسی را ماتریس «تصویر»[۴] می‌گویند. نشان دهید مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس تصویر $0$ یا $1$ هستند.

[۴] Projection

**تمرین ۲۸** فرض کنید که $|v\rangle \in \mathbb{C}^n$ یک بردار به طول واحد باشد. نشان دهید $|v\rangle\langle v|$ یک تصویر است.

در حالت کلی‌تر فرض کنید که $|v_1\rangle, \dots, |v_k\rangle$ بردارهایی واحد و دو به دو عمود بر هم باشند. نشان دهید $\sum_{i=1}^{k} |v_i\rangle\langle v_i|$ یک ماتریس تصویر است. رتبه‌ی این ماتریس را بیابید.

**تمرین ۲۹** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $I - |v\rangle\langle v|$ را بیابید.

**تمرین ۳۰** فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی باشد و $A^k = 0$ که در آن $k$ یک عدد طبیعی است. چنین ماتریسی را ماتریس «پوچ توان» می‌گویند. نشان دهید مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس پوچ توان همگی $0$ هستند.

بعدها خواهیم دید که برعکس هر مقدار ویژه‌ی $f(A)$ حتما برابر با $f(\lambda)$ برای مقدار ویژه‌ای مانند $\lambda$ از $A$ می‌باشد. نتیجه اینکه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی تابع یک ماتریس بر حسب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس اولیه قابل بیان هستند. به طور خاص اگر مقادیر ویژه‌ی $A$ برابر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشند، مقادیر ویژه $A^k$ عبارتند از $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.

## ۹ چندجمله‌ای مشخصه

دیدیم که اگر دترمینان

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

را بسط بدهیم به معادله‌ای بر حسب $\lambda$ می‌رسیم که چندجمله‌ای مشخصه (یا معادله‌ی مشخصه) نام دارد. این چندجمله‌ای همواره به شکل

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

قابل نوشتن است. دقت کنید که چون در حوزه اعداد مختلط هستیم، چندجمله‌ای مشخصه همواره $n$ ریشه دارد (هرچند ممکن است ریشه‌ها حقیقی نباشند).

**قضیه ۳۱** برای ماتریس مربعی $A$ با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ داریم

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n, \qquad trA = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

**اثبات:** در رابطه‌ی

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

قرار دهید $\lambda = 0$ که رابطه‌ی اول را نتیجه می‌دهد. برای اثبات رابطه‌ی دوم کافی است ضریب $\lambda^{n-1}$ را در دو طرف تساوی فوق حساب کنیم. □

**تمرین ۳۲** $A$ ماتریسی $2 \times 2$ است که $\det A = s$ و $trA = t$. $tr(A^2)$ را برحسب $s, t$ بیابید.

**قضیه ۳۳ (کیلی- همیلتون)** [5] اگر ماتریس $A$ را در چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن جایگزین کنیم، حاصل ماتریس صفر می‌شود. به عبارت دیگر

$$p_A(A) = 0.$$

[5] Cayley–Hamilton theorem

## ۱۰ ماتریس‌های متشابه

هر ماتریس $n \times n$ دارای دقیقا $n$ مقدار ویژه است چون هر چندجمله‌ای درجه $n$ دارای دقیقا $n$ ریشه در میدان اعداد مختلط است. ممکن است دو ماتریس متفاوت دارای مجموعه‌ی مقدار ویژه‌های یکسان باشند. مثلا قبلا دیدیم که تمام ماتریس های بالا مثلثی که درایه های روی قطرشان یکسان است دارای مجموعه‌ی مقدار ویژه‌های یکسان هستند (بنابراین چندجمله ای مشخصه یکسانی نیز دارند).

یک روش دیگر برای ساختن ماتریسی که چند جمله‌ای مشخصه‌اش با چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس دلخواه $A$ یکسان باشد این است که ماتریس وارون پذیری مثل $P$ را در نظر بگیریم و ماتریس $B = P^{-1}AP$ را تشکیل دهیم. در این صورت

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \det(PP^{-1}) \det(A - \lambda I) \\
&= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\
&= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\
&= p_B(\lambda).
\end{aligned}
$$

دو ماتریس $A$ و $B$ را که برای یک ماتریس وارون پذیر $P$ داشته باشیم $B = P^{-1}AP$ «متشابه» می‌گویند. طبق تساوی فوق مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس متشابه یکسان هستند. همچنین اثر دو ماتریس متشابه یکی است زیرا

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A(PP^{-1})) = \operatorname{tr}(A).$$

مجموعه‌ی ماتریس‌های متشابه یک کلاس هم‌ارزی تشکیل می‌دهند، به این معنی که اگر $A$ با $B$ متشابه باشد، و $B$ با $C$ متشابه باشد، آنگاه $A$ با $C$ نیز متشابه است.

ماتریس‌های متشابه دارای چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان هستند. اما اگر چندجمله‌ای مشخصه‌ی دو ماتریس یکسان باشد، لزوما دو ماتریس مشابه نیستند. مثلا ماتریس های

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

تنها مقدار ویژه صفر دارند و چندجمله‌ای مشخصه‌ی هر دو $\lambda^2$ است. ولی $A$ و $B$ متشابه نیستند. در واقع هیچ ماتریس دیگری با ماتریس $B = 0$ (همه درایه‌ها برابر صفر) متشابه نیست.

**تمرین ۳۴** تحقیق کنید که دو ماتریس متشابه دارای رتبه یکسان، دترمینان یکسان، اثر یکسان، مقادیر ویژه یکسان و چندجمله ای مشخصه یکسان هستند. اما بردارهای ویژه‌ی دو ماتریس متشابه لزوما یکسان نیستند.

## ۱.۱۰ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ضرب دو ماتریس

دو ماتریس دلخواه مربعی $A$ و $B$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس $A$ وارون پذیر باشد، دو ماتریس $AB$ و $BA$ متشابه خواهند بود زیرا

$$BA = A^{-1}(AB)A.$$

در نتیجه چندجمله‌ای مشخصه‌ی آنها با هم برابر است

$$p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$$

و از جمله مقادیر ویژه‌ی این دو ماتریس با هم مساوی خواهند بود. اما نکته جالب اینکه حتی وقتی $A$ وارون‌پذیر نباشد باز هم تساوی $p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$ برقرار است. برای اثبات این تساوی در حالت کلی (وقتی هیچ یک از $A$ یا $B$ وارون‌پذیر نباشند) از تکنیکی استفاده می‌کنیم که در جاهای دیگر نیز کاربرد دارد.

یک $\lambda$ و ماتریس $B$ ثابت در نظر بگیرید و به عبارت

$$p_{AB}(\lambda) - p_{BA}(\lambda)$$

به عنوان تابعی از درایه‌های ماتریس $A$ نگاه کنید. این عبارت بر حسب درایه‌های $A$ یک چندجمله‌ای چندمتغیره است. می‌دانیم که این چندجمله‌ای متحد با صفر است وقتی $A$ وارون پذیر باشد. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که این چندجمله‌ای حتی اگر $A$ وارون پذیر نباشد هم متحد با صفر است.

برای هر ماتریس $A$، مقدار $\epsilon_0 > 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ ماتریس $A - \epsilon I$ وارون‌پذیر باشد. دلیل این موضوع این است که اگر $A - \epsilon I$ وارون پذیر نباشد $\det(A - \epsilon I) = 0$ و $\epsilon$ یک مقدار ویژه‌ی $A$ خواهد بود. از آنجایی که تعداد مقادیر ویژه‌ی $A$ حداکثر برابر $n$ است، بازه $(0, \epsilon_0)$ وجود دارد که مقدار ویژه‌ای در آن نباشد. حال که ماتریس $A_\epsilon = A - \epsilon I$ وارون پذیر شد، رابطه

$$p_{A_\epsilon B}(\lambda) - p_{BA_\epsilon}(\lambda) = 0$$

برای $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ برقرار می‌شود. در واقع اگر

$$f(\epsilon) = p_{A_\epsilon B}(\lambda) - p_{BA_\epsilon}(\lambda)$$

را به عنوان یک چند جمله‌ای بر حسب $\epsilon$ بگیریم برای $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ داریم $f(\epsilon) = 0$. پس با توجه به پیوستگی داریم $f(0) = p_{AB}(\lambda) - p_{BA}(\lambda) = 0$.

اما یک اثبات دیگر و در نوع خود جالب: اتحاد زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

از آنجایی که

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

یک ماتریس وارون‌پذیر است (یک ماتریس بالا مثلثی با تمامی مقادیر ویژه‌اش یک)، می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

در نتیجه دو ماتریس

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

متشابه هستند و لذا مقادیر ویژه‌ی آنها یکسان است. اما مقادیر ویژه‌ی $C_1$ همان مقادیر ویژه $AB$ است به اضافه $n$ صفر (چون ماتریسی بلوکی است که بلوک بالای قطر آن صفر است). به طور مشابه مقادیر ویژه‌ی $C_2$ همان مقادیر ویژه $BA$ است به اضافه $n$ صفر. پس مقادیر ویژه $AB$ و $BA$ یکسان هستند (با احتساب تکرر مقادیر ویژه). نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای مشخصه‌ی آنها نیز یکسان است.

## ۱۱ قطری سازی

ماتریس مربعی $D$ را قطری گویند اگر همه درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند. منظور از «قطری سازی» ماتریس $A$ یافتن ماتریس $P$ است به طوری که

$$P^{-1}AP = D$$

که در آن $D$ قطری است. به عبارت دیگر قطری سازی مسأله‌ی یافتن ماتریسی قطری است که متشابه با $A$ باشد. قطری سازی همواره امکان‌پذیر نیست.

**مثال ۳۵** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

را در مثال ۲۰ محاسبه کردیم. ماتریس $P$ را با قرار دادن بردارهای ویژه‌ی $|v_1\rangle$ و $|v_2\rangle$ در ستون‌های آن بسازید:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

در این صورت به راحتی قابل بررسی است که

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

قطری است. توجه کنید که درایه‌های روی قطر همان مقادیر ویژه‌ی $A$ هستند.

در صورتی که بتوان یک ماتریس را قطری کرد محاسبه‌ی بهینه‌ی توان‌های آن ماتریس ممکن خواهد بود. در واقع داریم

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

از دیگر کاربردهای قطری‌سازی محاسبه‌ی بهینه‌ی نمای یک ماتریس است که در حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. معادله‌ی دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

که در آن $x$ یک بردار (متغیر با زمان) و $A$ یک ماتریس است. منظور از مشتق $x$ نسبت به زمان، مشتق مولفه‌های آن نسبت به زمان است. می‌توان نشان داد که جواب این معادله‌ی دیفرانسیل بشکل زیر است

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

که برای ماتریس دلخواه $A$، $e^{tA}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!}.$$

اگر ماتریس $D$ قطری باشد با درایه‌های $d_{ii}$ روی قطر، ماتریس $e^{tD}$ نیز قطری خواهد بود و درایه‌های روی قطرش برابر $e^{td_{ii}}$ خواهند بود. برای مثال $e^{tI} = e^tI$ .

اگر ماتریس $A$ توسط ماتریس وارون‌پذیر $P$ قطری‌شدنی باشد، دیدیم که

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

و در نتیجه

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

## ۱۲ چگونه یک ماتریس را قطری کنیم؟

فرض کنید ماتریس وارون پذیر $P$ وجود داشته باشد به طوری که

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

درنتیجه داریم

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

اگر ماتریس $P$ را بشکل بلوکی متشکل از ستون هایش بنویسیم، داریم

$$P = \left(|\alpha_1\rangle \quad |\alpha_2\rangle \quad \cdots \quad |\alpha_n\rangle\right),$$

و لذا رابطه‌ی بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$A|\alpha_i\rangle = \lambda_i|\alpha_i\rangle \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

بنابراین ستون‌های $P$ بردارهای ویژه‌ی $A$ هستند، و مقادیر ویژه‌ی متناظر مقادیر روی قطر هستند. وارون پذیر بودن $P$ این نتیجه را می‌دهد که بردار ویژه های $A$ مستقل خطی هستند (و در نتیجه پایه‌ای برای فضا تشکیل می‌دهند). پس اگر ماتریسی قابل قطری شدن باشد، دارای مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی‌ای است که یک پایه را تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر، اگر ماتریسی دارای $n$ بردار ویژه‌ی مستقل خطی باشد قابل قطری شدن خواهد بود. برای این کار ماتریس $P$ متناظر از کنار هم قرار دادن بردارهای ویژه به دست می‌آید. پس قضیه‌ی زیر ثابت شد.

**قضیه ۳۶** یک ماتریس $n \times n$ قطری شدنی است اگر و فقط اگر $n$ بردار ویژه‌ی مستقل خطی داشته باشد.

قضیه‌ی زیر شرطی کافی برای قطری شدن یک ماتریس بدست می‌دهد.

**قضیه ۳۷** بردارهای ویژه‌ی مربوط به مقادیر ویژه متمایز مستقل خطی هستند. به عبارت دیگر فرض کنید که $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ مقادیر ویژه‌ی متمایز $A$ هستند و متناظر با مقدار ویژه‌های $|\upsilon_1\rangle, \ldots, |\upsilon_k\rangle$. در این صورت $\{|\upsilon_1\rangle, |\upsilon_2\rangle, ..., |\upsilon_k\rangle\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است.

**نتیجه:** این قضیه به همراه قضیه‌ی قبل این است که اگر همه $n$ مقدار ویژه‌ی یک ماتریس $n \times n$ متمایز باشند آنگاه آن ماتریس قطری شدنی است.

حال به اثبات این قضیه می‌پردازیم.

**اثبات:** اثبات با فرض خلف. فرض کنید که ترکیب خطی با ضرایب ناصفری از $|\upsilon_1\rangle, |\upsilon_2\rangle, ..., |\upsilon_k\rangle$ وجود دارد که برابر صفر است. آن ترکیب خطی‌ای را در نظر بگیرید که کمترین تعداد ضریب ناصفر را دارد. بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض کنید که این رابطه خطی میان $r$ بردار اول است.

$$\alpha_1|\upsilon_1\rangle + \alpha_2|\upsilon_2\rangle + ... + \alpha_r|\upsilon_r\rangle = 0, \quad r \leq k$$

از ناصفر بودن بردار ویژه‌ها می‌توان فرض کرد $r > 1$. اگر دو طرف عبارت بالا را از سمت چپ در $A$ ضرب کنیم خواهیم داشت $A\left(\alpha_1|\upsilon_1\rangle + \alpha_2|\upsilon_2\rangle + ... + \alpha_r|\upsilon_r\rangle\right) = 0$ پس

$$\alpha_1\lambda_1|\upsilon_1\rangle + \alpha_2\lambda_2|\upsilon_2\rangle + ... + \alpha_r\lambda_r|\upsilon_r\rangle = 0,$$

که به ما معادله‌ی دیگری می‌دهد. حال اگر معادله اول را در $\lambda_r$ ضرب کرده و از معادله بالا کم کنیم به رابطه زیر میرسیم:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_r)|v_1\rangle+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_r)|v_2\rangle+...+\alpha_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)|v_{r-1}\rangle=0$$

که وابستگی جدیدی میان بردارها را بیان می‌کند. اما این رابطه تعداد ضرایب ناصفر کمتری از معادله اول دارد. و این تناقض است زیرا معادله اول ترکیب خطی‌ای بود که کمترین تعداد ضریب ناصفر را داشت. اثبات تمام است. □

**مثال ۳۸** ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}.$$

مقادیر ویژه‌ی این ماتریس عبارتند از

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=1.$$

بنابراین ماتریس  سه مقدار ویژه متمایز دارد، پس قابل قطری شدن است (چون بردار ویژه های مربوط به این مقادیر ویژه مستقل خطی خواهند بود). حال بردارهای ویژه‌ی متناظر برابرند با:

$$v_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

بسادگی میتوان بررسی کرد که $Av_k=\lambda_k v_k$. ماتریس $P$ را با کنار هم قرار دادن این بردارهای ویژه بشکل زیر می‌سازیم:

$$P=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

توجه کنید که ترتیب قرار دادن این بردار ویژه ها مهم نیست؛ جابجا کردن آنها تنها ترتیب مقادیر ویژه را در شکل قطری شده‌ی $A$ عوض می‌کند. داریم

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

دقت کنید که مقادیر ویژه بر روی قطر قرار گرفته اند.

**مثال ۳۹** ماتریس زیر قابل قطری شدن نیست

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

این ماتریس تنها یک مقدار ویژه صفر دارد (با تکرر دو)، و متناظر با این مقدار فقط یک بردار ویژه وجود دارد. پس قطری شدنی نیست.

**تمرین ۴۰** نشان دهید که هر ماتریس بالا مثلثی که درایه‌های روی قطرش همگی صفر باشند، قابل قطری شدن نیست.

قضیه ۳۶ شرط لازم و کافی برای قطری شدن یک ماتریس را بیان می‌کند. همچنین دیدیم که هر ماتریسی که مقادیر ویژه‌ی آن تکرر نداشته باشند قطری شدنی است. با این حال ماتریس‌هایی وجود دارند که قابل قطری شدن نیستند. چنین ماتریس‌هایی را می‌توان «تقریبا» قطری کرد. قضیه‌ی زیر فرم دقیق این مطلب را بیان می‌کند.

**قضیه ۴۱ (فرم جردن)** [۶] هر ماتریس مربعی $A$ متشابه با ماتریسی به فرم

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}$$

است (به صورت تعدادی بلوک ماتریسی روی قطر) به طوری که هر یک از زیرماتریس‌های $J_i$ به صورت

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

است. در ماتریس $J_i$ درایه هایی که خالی گذاشته شده‌اند برابر صفر هستند.

در حالتی خاصی که همه‌ی زیرماتریس‌های $J_i$ سایز $1 \times 1$ داشته باشند، ماتریس $A$ قطری شدنی است. توجه داشته باشید که $\lambda_i$-ها (مستقل از اینکه $A$ قطری شدنی باشد یا خیر) همان مقادیر ویژه‌ی $A$ هستند. اگر $J_i$ سایزی بزرگتر از $1 \times 1$ داشته باشد آنگاه مقدار ویژه‌ی $\lambda_i$ تکرر دارد.

در این درس به قضیه‌ی فرم جردان نیاز چندانی نداریم و آن را اثبات نمی‌کنیم.

**تمرین ۴۲** فرض کنید که $A$ یک ماتریس تصویر باشد. با استفاده از قضیه‌ی فرم جردن نشان دهید $rankA = trA$.

## ۱.۱۲ قطری سازی همزمان دو ماتریس

دیدیم که قطری کردن یک ماتریس محاسبه چندجمله ای های آن را آسان میکند. خیلی وقتها نیاز به محاسبه عباراتی که از دو ماتریس تشکیل شده اند. قطری کردن همزمان دو ماتریس محاسبه این عبارات را آسان میکند. دو ماتریس $A$ و $B$ هم زمان قطری می‌شوند اگر ماتریس $P$ وجود داشته باشد به طوری که

$$D_A = P^{-1}AP$$

$$D_B = P^{-1}BP$$

[۶] Jordan form

ماتریس‌هایی قطری باشند. یعنی توسط یک ماتریس $P$ بتوان همزمان دو ماتریس را قطری کرد.

**مشاهده:** اگر دو ماتریس $A$ و $B$ همزمان قطری شوند آنگاه $AB = BA$ زیرا روابط بالا نتیجه میدهند که

$$A = PD_AP^{-1}$$

$$B = PD_BP^{-1}$$

و در نتیجه

$$AB = PD_AP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_AD_BP^{-1} = PD_BD_AP^{-1} = PD_BP^{-1}PD_AP^{-1} = BA.$$

که در اینجا از این نکته استفاده کردیم ماتریس‌های قطری با هم جابجا می‌شوند ($D_AD_B = D_BD_A$).

**قضیه ۴۳** دو ماتریس $A$ و $B$ هم زمان قطری می‌شوند اگر و فقط اگر به تنهایی قطری شوند و با هم جابجا شوند.

**اثبات:** ضرورت جابجا شدن را در بالا دیدیم. کفایت آن را اینجا ثابت می‌کنیم.
دیدیم که اگر $P^{-1}AP$ قطری باشد آنگاه ستون‌های $P$ بردارهای ویژه‌ی $A$ را تشکیل می‌دهند. پس دو ماتریس در صورتی همزمان قطری می‌شوند که یک مجموعه‌ی بردارهای ویژه مشترک که یک پایه برای فضا تشکیل دهند داشته باشند. ما در اینجا دو اثبات برای وجود چنین پایه‌ای بیان می‌کنیم؛ یکی برای حالت خاصی که تمام مقادیر ویژه $A$ تکرر یک دارند و دیگری در حالت کلی.
ابتدا حالتی که تمام مقادیر ویژه $A$ تکرر یک دارند: فرض کنید که $|v\rangle$ یک بردار ویژه ماتریس $A$ با مقدار ویژه $\lambda$ باشد. از آنجایی که این مقدار ویژه تکرر یک دارد راستای بردار ویژه یکتا است. در این صورت

$$AB|v\rangle = BA|v\rangle = B(\lambda|v\rangle) = \lambda(B|v\rangle).$$

در نتیجه

$$A(B|v\rangle) = \lambda(B|v\rangle).$$

پس $B|v\rangle$ یک بردار ویژه ماتریس $A$ با مقدار ویژه $\lambda$ است. اما چون فرض کرده بودیم که راستای بردار ویژه یکتاست، باید ضریب $\mu$ وجود داشته باشد به طوری که

$$B|v\rangle = \mu|v\rangle.$$

در نتیجه $|v\rangle$ بردار ویژه $B$ نیز هست. حال چون طبق فرض $A$ (به تنهایی) قطری شدنی است، یک پایه از بردارهای ویژه‌ی آن وجود دارد. طبق استدلال بالا اعضای این پایه بردارهای ویژه‌ی $B$ نیز هستند. اثبات در این حالت تمام است.
حالت کلی را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس $A$ توسط $P$ قطری شود. یا به عبارت دیگر

$$A' = P^{-1}AP$$

قطری است. جهت سادگی و بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض میکنیم که مقادیر ویژه یکسان $A$ بصورت پشت سر هم روی قطر $A'$ ظاهر شده اند. یعنی

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{s_k} \end{pmatrix}$$

که در آن منظور از $I_{s_i}$ ماتریس همانی $s_i \times s_i$ است و فرض می‌کنیم $\lambda_i$-ها متمایز هستند. پس $\lambda_i$-ها مقادیر ویژه‌ی $A$ هستند با تکرر $s_i$. تعریف کنید

$$B' = P^{-1}BP.$$

از $AB = BA$ نتیجه می‌شود

$$A'B' = B'A'$$

پس یک ماتریس قطری داریم که با یک ماتریس دیگر جابجا میشود. اگر به درایه $(i, j)$ دو طرف تساوی فوق نگاه کنیم نتیجه می‌گیریم $B'$ قطری بلوکی است:

$$B' = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k \end{pmatrix}$$

که در آن $C_i$ یک ماتریس $s_i \times s_i$ است.

حال توجه کنید که طبق فرض $B$ قطری شدنی است. پس $B'$ و در نتیجه هر یک از زیرماتریس‌های $C_i$ قطری شدنی است (جزییات را به عهده‌ی خواننده واگذار می‌کنیم). فرض کنید ماتریس $Q_i$ زیر ماتریس $C_i$ را قطری کند، یعنی

$$Q_i^{-1} C_i Q_i$$

قطری باشد. قرار دهید

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$Q^{-1}B'Q$$

قطری خواهد بود. به علاوه با توجه به فرم بلوکی ماتریس $A'$ داریم

$$Q^{-1}A'Q = A'.$$

پس اگر قرار دهیم $R = PQ$ آنگاه $R$ وارون پذیر است و هر دوی $R^{-1}AR$ و $R^{-1}BR$ قطری هستند. $\square$

هر دو ماتریسی لزوما همزمان قطری نمی‌شوند. به عنوان مثال ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

قابل قطری شدن هستند، اما همزمان و در یک پایه قطری نمی‌شوند، زیرا با هم جابجا نمی‌شوند. در واقع همزمان قطری شدن دو ماتریس پدیده‌ای نادر است و اکثر ماتریس‌ها با هم جابجا نمی‌شوند.

**نتیجه**: در صورتی که دو ماتریس $A$ و $B$ با هم جابجا شوند (یعنی $AB = BA$) و هر دو قطری شدنی باشند، می‌توانیم آنها را همزمان و در یک پایه مشترک قطری کنیم. در نتیجه می‌توان با نوشتن بسط تیلور و جابجایی ماتریس‌های $A$ و $B$ و توان‌های آنها نشان داد که

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}.$$

به راحتی قابل بررسی است که حتی اگر $A$ و $B$ قطری شدنی نباشند (ولی با هم جابجا شوند) باز هم رابطه بالا برقرار است.

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که ماتریس $e^{tA}$ همواره وارون‌پذیر است (حتی اگر $A$ وارون پذیر نباشد) و وارون آن برابر $e^{-tA}$ است.

توجه کنید که اگر $AB \neq BA$، در حالت کلی

$$e^{(A+B)t} \neq e^{tA}e^{tB} \neq e^{tB}e^{tA}$$