نظریه اطلاعات کوانتمی ۱، ترم پاییز ۱۳۹۲-۱۳۹۱
مدرسین: ابوالفتح بیگی و امین زاده گوهری

جلسه ۲

فراگیری نظریه‌ی اطلاعات کوانتمی نیازمند داشتن پیش زمینه در جبرخطی می‌باشد. این نظریه ترکیب زیبایی از جبرخطی و نظریه‌ی احتمال است که فراگیری هر کدام برای مهارت در نظریه اطلاعات کوانتمی ضروری است. در این درسنامه ابتدا به مرور جبرخطی می‌پردازیم که هدف اصلی آن آشنایی با نمادگذاری دیراک [۱] و بخش‌هایی از جبرخطی است که در مکانیک کوانتمی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱ فضای برداری

جهت تعریف یک فضای برداری نیازمند یک میدان[۲] هستیم. یک میدان مجموعه‌ای از اعداد یا اسکالرها به همراه اعمال جمع و ضرب است که دارای خواصی طبیعی مانند شرکت پذیری، توزیع پذیری و جابجایی باشند. لیست این خواص را می‌توانید در ویکیپدیا بیابید. در این درس ما تنها به فضاهای برداری روی میدان اعداد مختلط (و در موارد اندکی روی میدان اعداد حقیقی) نیاز داریم. مجموعه $\mathcal{V}$ را یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌گوییم هرگاه دو عمل جمع بردارها و ضرب اسکالر بر روی آن تعریف شده باشد:

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{و} \quad \cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \qquad (۱)$$

لیست خواص جمع برداری و ضرب اسکالر را می‌توانید در ویکیپدیا بیابید.

مثال ۱ فضای برداری $\mathbb{R}^2$ که شامل زوج‌های مرتب (r_1, r_2) از اعداد حقیقی می‌باشد یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است. این فضای برداری متناظر با صفحه‌ی حقیقی (دو بعدی) است.

فضای برداری $\mathbb{C}^2$ که شامل زوج‌های مرتب (c_1, c_2) از اعداد مختلط می‌باشد یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است.

هر دوی این فضاهای برداری دو بعدی هستند (مفهوم بعد در ادامه دقیقا تعریف خواهد شد). اما فضاهای برداری با بعد نامحدود هم وجود دارند. مثلا فضای برداری تمامی توابع از بازه $[0, 1]$ به اعداد حقیقی یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است. در این درس معمولاً با فضاهای برداری با بعد محدود سر و کار داریم.

در نمادگذاری مرسوم که احتمالا با آن آشنایی دارید، بردارها را با نماد $\overrightarrow{v}$ نشان می‌دهند. اما در این درس ما از نماد $|v\rangle$ برای نشان دادن یک بردار استفاده می‌کنیم. یعنی بجای اینکه بالای بردار یک فلش بگذریم، بردار را میان دو نماد |

[۱] Dirac's notation
[۲] Field

و $\rangle$ محصور می‌کنیم که به آن "کت" گفته می‌شود. این نحوه‌ی نمادگزاری دیراک است؛ اگر چه در ابتدا عجیب به نظر می‌رسد اما پس از آشنایی با آن سهولت استفاده از آن روشن خواهد شد.

هر فضای برداری شامل یک بردار صفر است با این خاصیت که جمع هر بردار با بردار صفر، همان بردار است. ما این بردار صفر را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم. بنابراین $\mathbf{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$. دقت کنید که ما از نماد $|0\rangle$ برای بردار صفر استفاده نمی‌کنیم و این تنها استثنا در نمادگذاری دیراک است.

یک زیرفضای برداری به یک زیرمجموعه از $\mathcal{V}$ گفته میشود که خود یک فضای برداری باشد. برای مثال خطوطی که در صفحه‌ی دو بعدی از مبدا می‌گذرند زیرفضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^2$ هستند.

برای زیرمجموعه‌ای از بردارها

$$\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_k\rangle\} \tag{۲}$$

فضای پوشش داده شده توسط آنها را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$Span\,(|v_0\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_k\rangle) = \left\{ \sum_i a_i |v_i\rangle : \quad a_i \in \mathbb{C} \right\}. \tag{۳}$$

فضای پوشش داده شده توسط تعدادی بردار همواره یک زیر فضای برداری است.

یک مجموعه از بردارها را مستقل خطی[۳] می‌گوییم اگر هیچکدام را نتوان برحسب ترکیب خطی بقیه نوشت. به عبارت دیگر یک مجموعه از بردارها مستقل خطی است اگر هیچ ترکیب خطی ناصفر آنها مساوی بردار صفر نشود.

یک پایه[۴] مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است که فضای پوشش داده شده توسط آنها کل فضای برداری شود. یک فضای برداری تعداد زیادی پایه دارد، ولی تعداد اعضای هر پایه عددی ثابت و مستقل از انتخاب پایه است. به تعداد اعضای یک پایه بعد فضای برداری می‌گویند. همان طور که گفته شد در این درس معمولا بعد فضاهای برداری را متناهی می‌گیریم: $\dim \mathcal{V} = d < \infty$.

فرض کنید که بردارهای زیر پایه‌ای برای فضا هستند

$$\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_{d-1}\rangle\}. \tag{۴}$$

گاهی برای سادگی اعضای پایه $|v_i\rangle$ را با $|i\rangle$ نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که بردار $|0\rangle$ اولین بردار از مجموعه پایه است و بردار صفر نیست. هر بردار فضای برداری را می‌توان به صورت یکتا بر حسب ترکیبی خطی از اعضای پایه نوشت:

$$\forall |v\rangle \in \mathcal{V} \quad \exists \alpha_i, \quad |v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |v_i\rangle,$$

و لذا به هر بردار، می‌توان یک بردار ستونی متشکل از ضرایب نسبت داد:

$$|v\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{۵}$$

[۳] Linearly independent
[۴] Base

دقت کنید که این ضرایب به پایه خاصی که انتخاب کرده‌ایم بستگی دارند. در صورتی که پایه را تغییر دهیم، این ضرایب نیز تغییر می‌کنند.

نشان می‌دهیم که در صورتی که پایه را تغییر دهیم، بردار مختصات متناظر در یک ماتریس ضرب می‌شود که به آن ماتریس تغییر پایه می‌گویند. فرض کنید که

$$\{|\upsilon_0\rangle, |\upsilon_1\rangle, |\upsilon_2\rangle, \cdots, |\upsilon_{d-1}\rangle\}. \tag{۶}$$

و

$$\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_{d-1}\rangle\}. \tag{۷}$$

دو پایه برای فضای برداری $\mathcal{V}$ باشند. در این صورت می‌توانیم بردارهای هرکدام از پایه‌ها را بر حسب بردارهای پایه‌ی دیگر بسط دهیم. یعنی ضرایب p_{ij} و q_{ij} وجود دارند به طوری که

$$|\upsilon_j\rangle = \sum_i p_{ij}|e_i\rangle, \quad j = 0, 1, 2, ..., d-1$$
$$|e_j\rangle = \sum_i q_{ij}|\upsilon_i\rangle, \quad j = 0, 1, 2, ..., d-1.$$

حال ماتریس P را که درایه (i,j)-اش برابر p_{ij} می‌باشد، و ماتریس Q که درایه (i,j)-اش برابر q_{ij} می‌باشد را در نظر بگیرید. در این صورت اگر مختصات یک بردار را در پایه‌ی $\{|\upsilon_i\rangle\}$ برابر

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}.$$

باشد و بخواهیم بردار مختصات در پایه‌ی $\{|e_i\rangle\}$ را بیابیم، کافی است که بردار مختصات را در ماتریس P به شکل زیر ضرب کنیم

$$P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}.$$

یعنی $|v\rangle = \sum_i \beta_i |e_i\rangle$ که در آن $\beta_i = \sum_j p_{ij}\alpha_j$. دلیل این موضوع این است که

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_j \alpha_j |\upsilon_j\rangle \\ &= \sum_j \alpha_j \sum_i p_{ij}|e_i\rangle \\ &= \sum_{ij} p_{ij}\alpha_j |e_i\rangle \\ &= \sum_i |e_i\rangle \left(\sum_j p_{ij}\alpha_j\right). \end{aligned}$$

برعکس ماتریس تغییر پایه، از پایه‌ی $\{|e_i\rangle\}$ به پایه‌ی $\{|v_i\rangle\}$ برابر Q است. اگر از پایه‌ی $\{|v_i\rangle\}$ شروع کنیم، به پایه‌ی $\{|e_i\rangle\}$ برویم و سپس به همان پایه‌ی $\{|v_i\rangle\}$ برگردیم ماتریس متناظر این دو تغییر پایه برابر حاصلضرب QP است. از طرف دیگر وقتی به پایه‌ی $\{|v_i\rangle\}$ برمی‌گردیم باید به همان بردار مختصات اولیه برسیم. در نتیجه می‌بایست داشته باشیم $QP = I$ و $Q = P^{-1}$. پس ماتریس تغییر پایه همواره وارون پذیر است.

۲ ضرب داخلی

مقدمه

در دستگاه مختصات دکارتی با مفهوم ضرب داخلی آشنایی داریم. برای دو بردار با مولفه‌های حقیقی $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1})$ و $(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{d-1})$ ، ضرب داخلی به شکل $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \beta_i$ تعریف می‌شود که می‌توان این را بشکل ماتریسی هم نشان داد:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1}) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \beta_i$$

چنانچه بخواهیم این تعریف را برای بردارهای با مولفه‌های مختلط تعمیم دهیم، منطقی است که آن را به شکل زیر تعریف کنیم

$$(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i^* \beta_i$$

که منظور از α^* مزدوج مختلط α است. دلیل استفاده از مزدوج مختلط این است که ضرب داخلی یک بردار با خودش عددی حقیقی و نامنفی و برابر مجذور طول آن شود. توجه کنید که با در نظر گرفتن مزدوج مختلط تقارن ضرب داخلی از بین می‌رود. یعنی در حالت کلی

$$(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} \neq (\beta_0^*, \beta_1^*, \cdots, \beta_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix}$$

پس در محاسبه‌ی ضرب داخلی باید حواسمان باشد که کدام بردار را اولی می‌نویسیم، و کدام بردار را دوم. حال که بحث‌های کیفی را انجام دادیم وارد تعریف دقیق ریاضی می‌شویم.

تعریف دقیق ریاضی

عمل دوتایی $(.,.) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. نسبت به مولفه دوم خطی باشد:

$$(|v\rangle, \alpha|\omega\rangle + |\omega'\rangle) = \alpha(|v\rangle, |\omega\rangle) + (|v\rangle, |\omega'\rangle)$$

۲. وقتی جای بردارها را عوض می کنیم مزدوج شود:

$$(|v\rangle, |\omega\rangle) = (|\omega\rangle, |v\rangle)^*$$

۳. حاصلضرب داخلی هر بردار با خودش عددی حقیقی و نامنفی باشد:

$$(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$$

و همچنین

$$(|v\rangle, |v\rangle) = 0 \Longleftrightarrow |v\rangle = 0$$

توجه کنید که از خاصیت‌های ۱ و ۲ نتیجه می شود که :

$$(\alpha|v\rangle, |\omega\rangle) = \alpha^*(|v\rangle, |\omega\rangle).$$

اگر یک فضای برداری مجهز به ضرب داخلی باشد می‌توان برای آن «پایه‌ی متعامد یکه» در نظر گرفت. یک پایه‌ی متعامد یکه[۵] پایه‌ایست که ضرب داخلی هر دو عضو متفاوت آن 0 و ضرب داخلی هر بردار آن در خودش 1 باشد. به عبارت دیگر $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{V}$ است اگر

$$(|i\rangle, |j\rangle) = \delta_{ij}$$

که در آن δ_{ij} «دلتای کرونکر» به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

در این صورت مختصات یک بردار در پایه‌ی متعامد یکه را می‌توان بر حسب ضرب داخلی محاسبه کرد:

$$|v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} (|i\rangle, |v\rangle)|i\rangle.$$

پیش از این دیدیم که با تغییر پایه، مختصات یک بردار در یک ماتریس تغییر پایه ضرب میشود. حال این سؤال مطرح می‌شود که اگر یک پایه متعامد یکه داشته باشیم و آن را به یک پایه متعامد یکه دیگر تغییر دهیم ماتریس تغییر پایه چه خصوصیتی دارد؟ فرض کنید که

$$\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots, |v_{d-1}\rangle\} \tag{۸}$$

و

$$\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots, |e_{d-1}\rangle\} \tag{۹}$$

[۵] Orthonormal basis

دو پایه متعامد یکه برای فضای برداری $\mathcal{V}$ باشند. در این صورت برای یافتن ماتریس تغییر پایه بردارهای هرکدام از پایه ها را بر حسب بردارهای پایه دیگر بسط می‌دهیم. مثلا

$$|v_j\rangle = \sum_i p_{ij}|e_i\rangle, \quad j = 0, 1, 2, ..., d-1$$

از متعامد یکه بودن این بردارها نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\delta_{\ell k} = (|v_\ell\rangle, |v_k\rangle) &= \left(\sum_i p_{i\ell}|e_i\rangle, \sum_j p_{jk}|e_j\rangle\right) \\ &= \sum_{i,j} p^*_{i\ell} p_{jk}(|e_i\rangle, |e_j\rangle) \\ &= \sum_i p^*_{i\ell} p_{ik}.\end{aligned}$$

در نتیجه ستون های ماتریس P خود بردارهایی متعامد یکه را تشکیل می‌دهند (ضرب داخلی دو ستون متمایز صفر است، و ضرب داخلی یک ستون در خودش یک است). به ماتریس P-ای که از این طریق ایجاد می‌شود ماتریس یکانی[۶] می‌گویند و دارای این خاصیت است که $P^\dagger P = I$. در اینجا منظور از $P^\dagger$ «ترانهاده مزدوج» ماتریس P است. علامت $\dagger$ «دَگِر» خوانده می‌شود.

تساوی $P^\dagger P = I$ نتیجه می‌دهد که $P^\dagger = P^{-1}$ و همچنین

$$PP^\dagger = PP^{-1} = I$$

یعنی سطرهای ماتریس P نیز به هم عمودند. یکی از دلایلی که به چنین ماتریسی یکانی گفته می‌شود این است که $|\det(P)| = 1$ که با گرفتن دترمینان از $P^\dagger P = I$ قابل اثبات است. در ادامه خواهیم دید که تمامی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس یکانی روی دایره واحد قرار دارند.

دو ماتریس زیر هر دو یکانی هستند:

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

یک نمادگذاری دیگر

بجای نماد $(|v\rangle, |\omega\rangle)$ برای ضرب داخلی، معمولا از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$(|v\rangle, |\omega\rangle) = \langle v||\omega\rangle \equiv \langle v|\omega\rangle.$$

اگر به بردارها به عنوان ستونی از اعداد مختلط نگاه کنیم به ازای هر بردار $|v\rangle$ ، بردار سطری مزدوج مختلط آن را با $\langle v|$ نمایش میدهیم:

$$\langle v| = |v\rangle^\dagger.$$

[۶] Unitary

نماد مورد استفاده در دو طرف بردار «برا» نامیده می‌شود. بیاد آورید که برای بردارهای با مولفه‌های مختلط برای محاسبه ضرب داخلی از بردار اول مزدوج مختلط می‌گرفتیم و آن را ترانهاده کرده تا بردار سطری به بردار ستونی تبدیل شود

$$(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i^* \beta_i$$

مشاهده کنید که در نمادگذاری $\langle v|\omega\rangle$ بردار «برا» ($\langle v|$) را در کنار بردار «کت» ($|\omega\rangle$) قرار داده‌ایم. اینها با هم یک "براکت $\langle\rangle$" را تشکیل داده‌اند. این کار با نمایش ماتریسی بالا سازگار است؛ یعنی وقتی یک «برا» در کنار یک «کت» داریم مثل این است که این دو را در هم ضرب کرده‌ایم. نمادگذاری دیراک باعث شده است که زمانی که به بردارها به عنوان بردار، و یا به عنوان درایه‌ای ستونی از اعداد مختلط نگاه می‌کنیم تفسیر خود سازگاری داشته باشیم.

تفسیر بردار به عنوان یک ستون از اعداد مختلط زمانی معنی دارد که برای فضای برداری یک پایه در نظر گرفته باشیم، و بردار مورد نظرمان را بر حسب ترکیب خطی اعضای آن پایه نوشته باشیم. زمانی که این پایه را تغییر می‌دهیم، نمایش بردار مورد نظر در آن پایه نیز تغییر می‌کند (خود بردار تغییر نمی‌کند، اما نمایش آن تغییر می‌کند)؛ در نتیجه نمایش مزدوج مختلط آن نیز تغییر می‌کند اما خود بردار مزدوج مختلط $\langle v|$ تغییر نمی‌کند.

۱.۲ تغییر پایه و ضرب داخلی

اگر یک ضرب داخلی برای فضا در نظر بگیریم می‌توان صحبت از پایه‌ی متعامد یکه برای فضا کرد. بر عکس، اگر یک پایه دلخواه در نظر بگیریم می‌توان ضرب داخلی‌ای تعریف کرد که آن پایه نسبت به آن ضرب داخلی متعامد یکه باشد. مثلا فرض کنید $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ یک پایه‌ی دلخواه برای فضای برداری $\mathcal{V}$ (که مجهز به ضرب داخلی نیست) باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{V}$ ضرب داخلی‌ای تعریف کنیم به طوری که پایه‌ی $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ نسبت به این ضرب داخلی متعامد یکه باشد. دو بردار دلخواه $|v\rangle, |w\rangle \in \mathcal{V}$ در نظر بگیرید. از آنجا که $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ یک پایه است ضرایب α_i و β_i وجود دارند به طوری که

$$|v\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |v_i\rangle, \tag{۱۰}$$

$$|w\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i |v_i\rangle. \tag{۱۱}$$

حال تعریف کنید

$$(|v\rangle, |w\rangle) = \langle v|w\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i^* \beta_i = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{d-1}^*) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix}.$$

به راحتی قابل بررسی است که این ضرب داخلی همه خواص مورد نظر را دارد و همچنین $\{|v_0\rangle, \dots, |v_{d-1}\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه نسبت به این ضرب داخلی است.

بنابر این هر پایه‌ای که انتخاب کنیم، می‌توان از روی آن ضرب داخلی‌ای ساخت که آن پایه در آن متعامد یکه باشد. و بر عکس هر ضرب داخلی که انتخاب کنیم، با استفاده از آن می‌توان یک پایه متعامد یکه را پیدا کرد. پس تناظری (اما نه یک به یک) بین مجموعه‌ی پایه‌های متعامد یکه و مجموعه‌ی ضرب داخلی‌هایی که می‌توان روی یک فضا تعریف کرد وجود دارد.

همان طور که در بالا اشاره شد تناظر بین ضرب‌های داخلی‌ای که می‌توان روی یک فضای برداری تعریف کرد و پایه‌های متعامد یکه، یک به یک نیست. در واقع دو پایه‌ی متفاوت ممکن است منتج به یک ضرب داخلی شوند. در واقع اگر ماتریس تغییر پایه از پایه‌ی اول به پایه‌ی دوم یکانی باشد آنگاه ضرب داخلی تحمیل شده توسط این دو پایه با هم برابر است. برای اثبات دو پایه‌ی $\{|e_0\rangle, \ldots, |e_{d-1}\rangle\}$ و $\{|v_0\rangle, \ldots, |v_{d-1}\rangle\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که ماتریس تغییر پایه‌ی متناظر P یکانی باشد، یعنی $PP^\dagger = P^\dagger P = I$. اگر (۱۰) و (۱۱) نمایش بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ در پایه‌ی اولی باشند، آنگاه بردار مختصات آنها در پایه‌ی دوم برابر است با

$$P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix},$$

و

$$P \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه ضرب داخلی $|v\rangle$ و $|w\rangle$ نسبت به پایه‌ی دوم برابر است با

$$\left(P \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} \right)^\dagger \left(P \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} \right) = \left(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_{d-1}^*\right) P^\dagger P \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix} = \left(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_{d-1}^*\right) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{d-1} \end{pmatrix},$$

که همان ضرب داخلی این دو بردار نسبت به پایه‌ی اول است.

۲.۲ اندازه روی فضای $\mathcal{V}$

در یک فضای ضرب داخلی، نرم[۷] روی $\mathcal{V}$ را با استفاده از ضرب داخلی بردار در خودش به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| |v\rangle \| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

فاصله بین دو بردار را نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$d(|v\rangle, |\omega\rangle) = \| |v\rangle - |\omega\rangle \|.$$

[۷] Norm

$d(\cdot,\cdot)$ یک متر است چون می‌توان ثابت کرد که نامساوی مثلث برای آن برقرار است

$$\||x\rangle - |y\rangle\| + \||y\rangle - |z\rangle\| \geq \||x\rangle - |z\rangle\|,$$

و $d(|v\rangle, |\omega\rangle) = 0$ است اگر و فقط اگر $|v\rangle = |\omega\rangle$.

نامساوی کوشی-شوارز[۸] برای هر ضرب داخلی برقرار است:

$$|\langle v|\omega\rangle| \leq \||v\rangle\| \cdot \||\omega\rangle\|.$$

نکته: از آنجایی که ماتریس‌های یکانی ضرب داخلی را حفظ می‌کنند، طول بردارها را نیز حفظ می‌کنند. یعنی برای ماتریس یکانی P و بردار $|v\rangle$ داریم $\|P|v\rangle\| = \||v\rangle\|$.

[۸] Cauchy–Schwarz inequality