محاسبات کوانتمی (۲۲۶۷۱) ترم بهار ۱۳۹۱-۱۳۹۰

مدرس: سلمان ابوالفتح بیگی نویسنده: سلمان ابوالفتح بیگی

جلسه ۱۱

در این جلسه می‌خواهیم متری روی فضای حالات کوانتمی تعریف کنیم به طوری که با محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو حالت بتوانیم تشخیص دهیم تا چه حد شبیه هم هستند. هر سیستم کوانتمی متناظر با یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است و حالات آن سیستم با ماتریس‌های چگالی $\rho \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شوند. روی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ نرم‌های زیادی قابل تعریف هستند. برای هر $1 \leq p \leq \infty$ و $X \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ تعریف کنید

$$\|X\|_p := \left(\mathrm{tr}(X^\dagger X)^{p/2}\right)^{1/p}.$$

در این صورت $d_p(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_p$ یک متر روی $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ و در نتیجه رو فضای حالات کوانتمی خواهد بود.

برای $p = 2$ این همان متری است که بوسیله‌ی ضرب داخلی فضای $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ القاء می‌شود که به آن نرم هیلبرت-اشمیت هم می‌گویند. $p = \infty$ نرم عملگری را می‌دهد. نامساوی مهمی که برای این نرم‌ها برقرار است نامساوی هولدر[1] است. برای هر $1 \leq p, q \leq \infty$ که $1/p + 1/q = 1$ داریم:

$$|\mathrm{tr}(XY)| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

با وجود همه‌ی این مترهایی که روی فضای حالات کوانتمی قابل تعریف هستند، به دنبال متری هستیم که «معنای عملگری» داشته باشد. یعنی اینکه فاصله‌ی بین دو حالت کوانتمی اطلاعاتی در مورد سیستم فیزیکی‌ای که در هر یک از آن دو حالت قرار دارد بدهد.

۱ فاصله‌ی اثر

اگر دو حالت کوانتمی به هم نزدیک باشند، احتمال اینکه بتوان آنها را از هم تمیز داد کم است. بالعکس اگر دو حالت از هم دور باشند با احتمال زیاد می‌توان آنها را از هم تمیز داد. لذا احتمال تمیز دادن دو حالت کوانتمی معیاری از دوری یا نزدیکی آنهاست. مسأله‌ی تمیزی دادن حالت کوانتمی را قبلاً بررسی کردیم.

فرض کنید که یک سیستم کوانتمی با احتمال $1/2$ در حالت ρ و با احتمال $1/2$ در حالت σ آماده‌سازی شده است. می‌خواهیم تشخیص دهیم در کدام حالت است. برای این کار یک اندازه‌گیری دو-دویی روی سیستم انجام می‌دهیم. اگر حاصل اندازه‌گیری 0 شد می‌گوییم سیستم در حالت ρ است، و در غیر این صورت می‌گوییم حالت سیستم σ است. از آنجا

[1] Holder's inequality

که در این مسأله فقط احتمالات برای ما مهم هستند می‌توانیم از فرمول بندی POVM برای اندازه‌گیری استفاده کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} Pr(\text{حدس درست}) &= \max_{0\leq E_0,E_1:E_0+E_1=I} \quad \frac{1}{2}\text{tr}(E_0\rho)+\frac{1}{2}\text{tr}(E_1\sigma) \\ &= \max_{0\leq E\leq I} \quad \frac{1}{2}\text{tr}(E\rho)+\frac{1}{2}\text{tr}((I-E)\sigma) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(E(\rho-\sigma)). \end{aligned}$$

پس هر قدر $\max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(E(\rho-\sigma))$ بزرگ باشد احتمال اینکه ρ و σ را از هم تمیز دهیم بیشتر است. بنابراین می‌توانیم این عدد را به عنوان فاصله‌ی این دو حالت تعریف کنیم:

$$D(\rho,\sigma) := \max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(E(\rho-\sigma)).$$

حال به این سؤال پاسخ می‌دهیم که چگونه می‌توان $D(\rho,\sigma)$ را حساب کرد. $\rho-\sigma$ یک ماتریس هرمیتی است. پس در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری شدنی است و همه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی هستند:

$$\rho-\sigma=\sum_i \lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|$$

که در آن $\{|v_i\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است. تعریف کنید

$$S=\sum_{i:\,\lambda_i>0}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|, \qquad T=-\sum_{i:\,\lambda_i<0}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|.$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \rho-\sigma &= S-T, \\ S,T &\geq 0, \\ ST=TS &= 0, \\ \text{tr}S &= \text{tr}T. \end{aligned}$$

رابطه‌ی اول و دوم طبق تعریف برقرارند، و رابطه‌ی سوم از عمود بودن $|v_i\rangle$ها بدست می‌آید. برای رابطه‌ی چهارم توجه کنید که $\text{tr}S-\text{tr}T=\text{tr}\rho-\text{tr}\sigma=1-1=0$. حال داریم

$$\begin{aligned} D(\rho,\sigma) &= \max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(E(\rho-\sigma)) \\ &= \max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(ES)-\text{tr}(ET) \\ &\leq \max_{0\leq E\leq I}\text{tr}(ES) \\ &\leq \text{tr}S. \end{aligned}$$

در این جا آخرین نامساوی برقرار است به این دلیل که $0 \leq E \leq I$ و

$$\mathrm{tr}(ES) = \sum_{i:\lambda_i>0} \lambda_i \langle v_i|E|v_i\rangle \leq \sum_{i:\lambda_i>0} \lambda_i = \mathrm{tr}S.$$

پس $D(\rho,\sigma) \leq \mathrm{tr}S$. از طرف دیگر برای

$$F = \sum_{i:\lambda_i>0} |v_i\rangle\langle v_i|$$

داریم $FT = 0$ و $FS = S$ و همچنین $0 \leq F \leq I$. در نتیجه $\mathrm{tr}(F(\rho-\sigma)) = \mathrm{tr}(FS) - \mathrm{tr}(FT) = \mathrm{tr}S$.
بنابراین

$$D(\rho,\sigma) = \mathrm{tr}S.$$

۱.۱ خواص $D(\cdot,\cdot)$

۱. $0 \leq D(\rho,\sigma) \leq 1$

اثبات: به این دلیل که $(1 + D(\rho,\sigma))/2$ یک احتمال است.

۲. $D(\rho,\sigma) = 0$ اگر و فقط اگر $\rho = \sigma$

اثبات: $D(\rho,\sigma) = 0$ نتیجه می‌دهد که $\mathrm{tr}S = \mathrm{tr}T = 0$ و از آنجا که T, S هر دو مثبت نیمه معین هستند نتیجه می‌گیریم $S = T = 0$. پس $\rho - \sigma = 0$.

۳. $D(\sigma,\sigma') \leq D(\rho,\sigma) + D(\rho,\sigma')$

اثبات: برای اثبات نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} D(\sigma,\sigma') &= \max_{0\leq E\leq I} \mathrm{tr}(E(\sigma-\sigma')) \\ &= \max_{0\leq E\leq I} \mathrm{tr}(E(\sigma-\rho)) + \mathrm{tr}(E(\rho-\sigma')) \\ &\leq \max_{0\leq E_1\leq I} \mathrm{tr}(E_1(\sigma-\rho)) + \max_{0\leq E_2\leq I} \mathrm{tr}(E_2(\rho-\sigma')) \\ &= D(\rho,\sigma) + D(\rho,\sigma'). \end{aligned}$$

سه خاصیت فوق نشان می‌دهند که $D(\cdot,\cdot)$ یک متر است.

۴. $D(\rho,\sigma) = 1$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$

اثبات: اگر $D(\rho,\sigma)=0$ یعنی $0\le E\le I$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{tr}(E\rho)-\mathrm{tr}(E\sigma)=1$. از آنجا که $0\le \mathrm{tr}(E\rho),\mathrm{tr}(E\sigma)\le 1$ نتیجه می‌گیریم $\mathrm{tr}(E\rho)=\mathrm{tr}(\rho)=1$ و $\mathrm{tr}(E\sigma)=0$. چون σ و E هر دو مثبت نیمه معین هستند $E\sigma=\sigma E=0$. به همین ترتیب از $\mathrm{tr}((I-E)\rho)=0$ نتیجه می‌شود $E\rho=\rho E=\rho$. حال داریم

$$\rho\sigma=(\rho E)\sigma=\rho(E\sigma)=0,$$

و به همین ترتیب $\sigma\rho=0$.

بالعکس اگر $\rho\sigma=\sigma\rho=0$ آنگاه $S=\rho$ و $T=\sigma$. لذا $D(\rho,\sigma)=\mathrm{tr}S=\mathrm{tr}\rho=1$.

۵. $D(\cdot,\cdot)$ تحت نگاشت‌های یکانی پایاست. یعنی برای هر عملگر یکانی U داریم $D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=D(\rho,\sigma)$

اثبات: قرار دهید $S'=USU^\dagger$ و $T'=UTU^\dagger$. داریم $U\rho U^\dagger-U\sigma U^\dagger=S'-T'$، $S',T'\ge 0$ و $S'T'=T'S'=0$. بنابراین

$$D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=\mathrm{tr}S'=\mathrm{tr}S=D(\rho,\sigma).$$

۶. $D(\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}),\mathrm{tr}_B(\sigma_{AB}))\le D(\rho_{AB},\sigma_{AB})$

اثبات: طبق تعریف داریم

$$\begin{aligned}D(\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}),\mathrm{tr}_B(\sigma_{AB}))&=\max_{0\le E_A\le I_A}\mathrm{tr}(E_A(\mathrm{tr}_B\rho_{AB}-\mathrm{tr}_B\sigma_{AB}))\\&=\max_{0\le E_A\otimes I_B\le I_A\otimes I_B}\mathrm{tr}((E_A\otimes I_B)(\rho_{AB}-\sigma_{AB}))\\&\le\max_{0\le E_{AB}\le I_A\otimes I_B}\mathrm{tr}(E_{AB}(\rho_{AB}-\sigma_{AB}))\\&=D(\rho_{AB},\sigma_{AB}).\end{aligned}$$

که در تساوی دوم از $\mathrm{tr}((M_A\otimes I_B)X_{AB})=\mathrm{tr}(M_A(\mathrm{tr}_BX_{AB}))$ استفاده کردیم که به راحتی قابل بررسی است.

۷. $D(\rho\otimes\tau,\sigma\otimes\tau)=D(\rho,\sigma)$

اثبات: تعریف کنید $S'=S\otimes\tau$ و $T'=T\otimes\tau$. در این صورت $\rho\otimes\tau-\sigma\otimes\tau=S'-T'$، $S',T'\ge 0$ و $S'T'=T'S'=0$. بنابراین

$$D(\rho\otimes\tau,\sigma\otimes\tau)=\mathrm{tr}S'=(\mathrm{tr}S)(\mathrm{tr}\tau)=\mathrm{tr}S=D(\rho,\sigma).$$

۸. برای هر نگاشت کوانتمی Φ داریم $D(\Phi(\rho), \Phi(\sigma)) \leq D(\rho, \sigma)$

اثبات: جلسه‌ی گذشته نشان دادیم هر نگاشت کوانتمی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_B \left(U_{AB}(\rho_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B) U_{AB}^\dagger \right)$$

حال با توجه به خواص ۵ و ۶ و ۷ داریم

$$\begin{aligned} D(\Phi(\rho), \Phi(\rho)) &\leq D(U_{AB}(\rho_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B) U_{AB}^\dagger, U_{AB}(\sigma_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B) U_{AB}^\dagger) \\ &= D(\rho_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B, \sigma_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B) \\ &= D(\rho, \sigma). \end{aligned}$$

۲.۱ تعمیم تعریف $D(\cdot,\cdot)$ به کل $\mathbf{L}(\mathcal{H})$

تا اینجا $D(\cdot,\cdot)$ را برای ماتریس‌های چگالی تعریف کردیم. می‌خواهیم این تعریف را به کل $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ تعمیم دهیم. ابتدا توجه کنید که

$$D(\rho, \sigma) = \mathrm{tr} S = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S+T).$$

برای هر $X \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ تعریف کنید

$$|X| := (X^\dagger X)^{1/2}.$$

توجه کنید که $X^\dagger X$ همواره مثبت نیمه معین است و لذا $|X|$ خوش تعریف است. حال داریم:

$$\begin{aligned} |\rho - \sigma| &= ((\rho-\sigma)^2)^{1/2} = ((S-T)^2)^{1/2} = (S^2 + T^2 - ST - TS)^{1/2} \\ &= (S^2 + T^2 + ST + TS)^{1/2} = ((S+T)^2)^{1/2} = S + T, \end{aligned}$$

که در اینجا از $ST = TS = 0$ و اینکه $S+T$ مثبت نیمه معین است استفاده کردیم. بنابراین

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S+T) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|\rho - \sigma|.$$

پس برای هر $X, Y \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ می‌توان تعریف کرد

$$D(X, Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|X - Y|.$$

توجه کنید که $\mathrm{tr}|X-Y|$ همان $\|X-Y\|_p$ برای $p=1$ است که در بالا تعریف شد. یعنی

$$D(X, Y) = \frac{1}{2}\|X - Y\|_1.$$

$\|\cdot\|_1$ را گاهی با $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ نیز نشان می‌دهند و به آن نرم اثر[۲] می‌گویند. طبق نامساوی هولدر داریم

$$|\mathrm{tr}(XY)| \leq \|X\|_\infty \|Y\|_{\mathrm{tr}}$$

[۲] Trace norm

که در اینجا $\|X\|_\infty$ برابر با بزرگترین مقدار ویژه‌ی $|X|$ است.

توجه کنید که اگر $X = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|$ و $Y = \sum_i q_i|i\rangle\langle i|$ هر دو در پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|i\rangle\}$ قطری باشند، آنگاه $|X-y| = \sum_i |p_i - q_i||i\rangle\langle i|$ و در نتیجه

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_i |p_i - q_i|.$$

۲ Fidelity

در این بخش کمیتی دیگر برای سنجش دوری یا نزدیکی دو حالت کوانتمی ρ و σ معرفی می‌کنیم. اگر $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ و $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ هر دو محض باشند، ضرب داخلی $|\langle\psi|\phi\rangle|$ دور یا نزدیک بودن $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را مشخص می‌کند. پس تعریف می‌کنیم

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|.$$

حال سؤال این است که چگونه این تعریف را برای حالات غیر محض نیز تعمیم دهیم. برای این کار از مفهوم محض سازی[۳] استفاده می‌کنیم. $|\psi\rangle_{AB}$ را یک محض سازی ρ_A نامند اگر

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}).$$

برای حالات دلخواه کوانتمی ρ و σ تعریف می‌کنیم

$$F(\rho_A, \sigma_A) = \max_{|\psi\rangle_{AB}, |\phi\rangle_{AB}} |\langle\psi|\phi\rangle|,$$

که در آن $\mathcal{H}_B$ «یکریخت» با $\mathcal{H}_A$ است (دارای بعد یکسان هستند) و $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض سازی ρ_A است و $|\phi\rangle_{AB}$ یک محض سازی σ_A.

برای بدست آوردن یک فرم بسته برای $F(\rho,\sigma)$ نیاز به بررسی محض سازی‌ها داریم.

۱.۲ محض سازی‌های یک حالت کوانتمی

قضیه: فرض کنید ρ_A یک حالت کوانتمی باشد که در آن $\mathcal{H}_A$ یک فضای هیلبرت با پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|0\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}$ است. $\mathcal{H}_{A'}$ را نیز یک فضای هیلبرت یکریخت با $\mathcal{H}_A$ بگیرید و تعریف کنید

$$|M\rangle_{AA'} = \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_{A'}.$$

در این صورت $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض سازی از ρ_A است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد نگاشت خطی $V : \mathcal{H}_{A'} \to \mathcal{H}_B$ به طوری که[۴] $V^\dagger V = I_{A'}$ و

$$|\psi\rangle_{AB} = \rho_A^{1/2} \otimes V|M\rangle_{AA'}.$$

[۳] Purification

[۴] این تساوی نشان می‌دهد که V حافظ ضرب داخلی است ولی لزوماً پوشا نیست.

در اینجا نشان می‌دهیم $|\psi\rangle_{AB}$ به صورت فوق یک محض سازی از ρ_A است. برای اثبات عکس قضیه به کتاب مرجع نگاه کنید.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\left(|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}\right) &= \mathrm{tr}_B\left(\rho_A^{1/2}\otimes V|M\rangle\langle M|_{AA'}\rho_A^{1/2}\otimes V^\dagger\right)\\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1}\mathrm{tr}_B\left(\rho^{1/2}|i\rangle\langle j|\rho^{1/2}\otimes V|i\rangle\langle j|V^\dagger\right)\\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1}(\mathrm{tr}(V|i\rangle\langle j|V^\dagger))\rho^{1/2}|i\rangle\langle j|\rho^{1/2}\\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1}(\mathrm{tr}(V^\dagger V|i\rangle\langle j|))\rho^{1/2}|i\rangle\langle j|\rho^{1/2}\\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1}(\mathrm{tr}|i\rangle\langle j|)\rho^{1/2}|i\rangle\langle j|\rho^{1/2}\\
&= \sum_{i=0}^{d-1}\rho^{1/2}|i\rangle\langle i|\rho^{1/2}\\
&= \rho^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{d-1}|i\rangle\langle i|\right)\rho^{1/2}\\
&= \rho.
\end{aligned}$$

۲.۲ فرم بسته‌ی $F(\rho,\sigma)$

با استفاده از این قضیه $F(\rho,\sigma)$ را می‌توان حساب کرد.

$$\begin{aligned}
F(\rho_A,\sigma_A) &= \max_{|\psi\rangle_{AB},|\phi\rangle_{AB}}|\langle\psi|\phi\rangle|\\
&= \max_{V,W}|(\rho^{1/2}\otimes V|M\rangle,\sigma^{1/2}\otimes W|M\rangle)|\\
&= \max_{V,W}|\langle M|(\rho^{1/2}\otimes V^\dagger)(\sigma^{1/2}\otimes W)|M\rangle\\
&= \max_{V,W}|\langle M|\left(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}\otimes V^\dagger W\right)|M\rangle|\\
&= \max_{V,W}|\mathrm{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}(V^\dagger W)^T)|,
\end{aligned}$$

که در آن $V^\dagger V = W^\dagger W = I$ و در تساوی آخر از رابطه‌ی

$$\langle M|(X\otimes Y)|M\rangle = \mathrm{tr}(XY^T)$$

استفاده کردیم که به راحتی قابل بررسی است. حال توجه کنید که در تعریف $F(\rho_A,\sigma_A)$ (برخلاف قضیه‌ی فوق) فرض کردیم که $\mathcal{H}_A\simeq\mathcal{H}_B$. پس از $V^\dagger V = W^\dagger W = I$ نتیجه می‌شود که V,W پوشا نیز هستند و در نتیجه یکانی.

بنابراین $(V^\dagger W)^T$ نیز یکانی است و

$$F(\rho_A, \sigma_A) = \max_U |\mathrm{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}U)|,$$

که در آن ماکزیمم روی همه‌ی عملگرهای یکانی U است.

قضیه: برای هر $X \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ داریم

$$\max_U |\mathrm{tr}(UX)| = \|X\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}|X|$$

که در آن ماکزیمم روی همه‌ی عملگرهای یکانی U است.

برای اثبات این قضیه از singular valued decomposition استفاده می‌کنیم. ماتریس‌های یکانی V_1, V_2 و عملگر قطری و مثبت نیمه معین $\Lambda \geq 0$ وجود دارند به طوری که $X = V_1 \Lambda V_2$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\max_U |\mathrm{tr}(UX)| &= \max_U |\mathrm{tr}(UV_1\Lambda V_2)| \\ &= \max_U |\mathrm{tr}((V_2UV_1)\Lambda)| \\ &= \max_U |\mathrm{tr}(U\Lambda)| \\ &= \mathrm{tr}\Lambda.\end{aligned}$$

در تساوی آخر از این نکته استفاده کردیم که اولاً برای $U = I$ تساوی اتفاق می‌افتد. ثانیاً برای هر U دلخواه اگر $\Lambda = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ داریم

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(U\Lambda)| &= |\sum_i \lambda_i \langle i|U|i\rangle| \leq \sum_i \lambda_i |\langle i|U|i\rangle| \\ &= \sum_i \lambda_i |(|i\rangle, U|i\rangle)| \leq \sum_i \lambda_i \||i\rangle\| \cdot \|U|i\rangle\| \\ &= \sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}\Lambda.\end{aligned}$$

پس داریم $\max_U |\mathrm{tr}(UX)| = \mathrm{tr}\Lambda$. از طرف دیگر داریم $|X| = (X^\dagger X)^{1/2} = (V_2^\dagger \Lambda^2 V_2)^{1/2} = V_2^\dagger \Lambda V_2$. بنابراین

$$\|X\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}|X| = \mathrm{tr}(V_2^\dagger \Lambda V_2) = \mathrm{tr}\Lambda = \max_U |\mathrm{tr}(UX)|.$$

حال با توجه به این قضیه می‌توانیم fidelity را حساب کنیم:

$$F(\rho, \sigma) = \max_U |\mathrm{tr}(\rho^{1/2}\sigma^{1/2}U)| = \|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = \mathrm{tr}\left(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}\right)^{1/2}.$$

۳.۲ خواص fidelity

برای جمع بندی قسمت قبل توجه کنید که برای محاسبه‌ی filelity دو روش ارایه دادیم. روش اول

$$F(\rho,\sigma) = \mathrm{tr}|\rho^{1/2}\sigma^{1/2}| = \mathrm{tr}\left(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}\right)^{1/2}. \qquad (۱)$$

روش دوم

$$F(\rho_A,\sigma_A) = \max_{|\psi\rangle_{AB},|\phi\rangle_{AB}} |\langle\psi|\phi\rangle|. \qquad (۲)$$

که در آن $|\psi\rangle_{AB}$ یک محض سازی ρ_A است و $|\phi\rangle_{AB}$ یک محض سازی σ_A. نکته‌ای که در اینجا قابل ذکر است این است که در قسمت قبل برای تعریف $F(\rho_A,\sigma_A)$ برحسب محض سازی‌ها فرض کردیم که $\mathcal{H}_B$ یکریخت با $\mathcal{H}_A$ است. با بررسی دقیق‌تر مراحل اثبات معادل بودن تعاریف (۱) و (۲) می‌توان نشان داد که فرض یکریخت بودن $\mathcal{H}_B$ و $\mathcal{H}_A$ قابل برداشتن است.

۱. $F(\rho,|\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\rho|\phi\rangle^{1/2}$

اثبات: کافی است از رابطه‌ی (۱) استفاده کنیم.

۲. $0 \leq F(\rho,\sigma) \leq 1$

اثبات: $F(\rho,\sigma)$ برابر با قدر مطلق ضرب داخلی دو بردار یکه است.

۳. $F(\rho,\sigma) = 1$ اگر و فقط اگر $\rho = \sigma$

اثبات: $F(\rho,\sigma) = 1$ اگر و فقط ρ و σ دو محض سازی داشته باشند که $|\langle\psi|\phi\rangle| = 1$. در این صورت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ فقط در یک فاز با هم تفاوت دارند. پس $|\psi\rangle\langle\psi| = |\phi\rangle\langle\phi|$ و

$$\rho = \mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{tr}_B|\phi\rangle\langle\phi| = \sigma.$$

۴. $F(\rho,\sigma) = 0$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$

اثبات: $F(\rho,\sigma) = 0$ اگر و فقط $\mathrm{tr}\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2} = 0$ اگر و فقط اگر $\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2} = 0$ اگر و فقط اگر $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$. توجه کنید که در اینجا از مثبت نیمه معین بودن ρ,σ استفاده کردیم.

۵. $F(\cdot,\cdot)$ تحت عملگرهای یکانی پایاست یعنی برای هر U یکانی داریم $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho,\sigma)$

اثبات: کافی است توجه کنیم که $(U\rho U^\dagger)^{1/2} = U\rho^{1/2}U^\dagger$ و از رابطه‌ی (۱) استفاده کنیم.

۶. $F(\mathrm{tr}_B\rho_{AB}, \mathrm{tr}_B\sigma_{AB}) \geq F(\rho_{AB},\sigma_{AB})$

اثبات: کافی است توجه کنیم که هر محض سازی از ρ_{AB} یک محض سازی از $\mathrm{tr}_B\rho_{AB}$ نیز هست و از رابطه‌ی (۲) استفاده کنیم.

۷. $F(\rho\otimes\tau, \sigma\otimes\tau) = F(\rho,\sigma)$

اثبات: توجه کنید که $(\rho\otimes\tau)^{1/2} = \rho^{1/2}\otimes\tau^{1/2}$ و از رابطه‌ی (۱) استفاده کنید.

۸. برای هر نگاشت کوانتمی Φ داریم $F(\Phi(\rho),\Phi(\sigma)) \geq F(\rho,\sigma)$

اثبات: هر نگاشت کوانتمی به صورت

$$\Phi(\rho) = \mathrm{tr}_B\left(U_{AB}(\rho_A\otimes|0\rangle\langle 0|_B)U_{AB}^\dagger\right)$$

قابل بیان است. حال کافی است از خواص ۵ و ۶ و ۷ استفاده کنیم.

۳ ارتباط بین $D(\rho,\sigma)$ و $F(\rho,\sigma)$

برای هر ρ,σ داریم

$$1 - F(\rho,\sigma) \leq D(\rho,\sigma) \leq \sqrt{1-F(\rho,\sigma)^2}.$$

برای اثبات این دو نامساوی به کتاب مرجع نگاه کنید.