مدرس: سلمان ابوالفتح بیگی نویسنده: محمد جواد داوری

جلسه ۳

ابتدا نکته‌ای در مورد عمل توابع بر روی ماتریس‌ها گفته می شود و در ادامه‌ی این جلسه اصول مکانیک کوانتمی بیان می شود.

اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ هرمیتی و به صورت زیر باشد:

$$A=\sum_{i=0}^{d-1}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|$$

آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$f(A):=\sum_{i=0}^{d-1}f(\lambda_i)|v_i\rangle\langle v_i|.$$

مثال: اگر $f(x)=x^2$ آنگاه

$$f(A)=\sum_{i=0}^{d-1}\lambda_i^2|v_i\rangle\langle v_i|$$

و داریم

$$\begin{aligned}A^2&=(\sum_{i=0}^{d-1}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|).(\sum_{i=0}^{d-1}\lambda_i|v_i\rangle\langle v_i|)\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j|v_i\rangle\langle v_i|v_j\rangle\langle v_j|\\&=\sum_i\lambda_i^2|v_i\rangle\langle v_i|\\&=f(A).\end{aligned}$$

در حالت کلی برای هر چند جمله ای $P(x)=\sum a_nx^n$ داریم

$$P(A)=\sum a_nA^n.$$

توجه کنید که مقادیر ویژه $f(A)$ برابر با $f(\lambda_i)$ هستند که λ_i ها مقادیر ویژه های A هستند.

۱ اصول مکانیک کوانتمی

۱.۱ اصل اول - فضای حالات

اصل اول: به هر سیستم فیزیکی یک فضای هیلبرت متناظر است. حالت[۱] سیستم (در هر لحظه از زمان) با یک بردار ناصفر در فضای هیلبرت مشخص می شود. دو بردار که ضریبی از یکدیگر باشند یک حالت فیزیکی را بیان می کنند. بنابراین حالت سیستم را می توان با یک بردار به طول یک (بردار واحد) مشخص کرد.

فضای هیلبرت فضای برداری است که دارای ضرب داخلی باشد و نسبت به نرمی که ضرب داخلی آن القاء می‌کند کامل باشد. توجه کنید که فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی همواره کامل هستند.

مثال: کیوبیت[۲] یک سیستم کوانتمی است که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ متناظر آن دو بعدی باشد. اگر پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ را برای این فضا در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad |\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \qquad a, b \in \mathbb{C}$$
$$\||\psi\rangle\| = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

بردار یکه‌ی $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ مثالی است از حالتی که یک کیوبیت می‌تواند داشته باشد. از آنجا که این بردار ضریبی از بردار یکه‌ی $(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)$ است، این دو بردار یک حالت سیستم را نشان می‌دهند. تفاوت این دو بردار یکه ضریب کلی با نرم یک[۳] است و لذا به عنوان حالات کوانتمی، یکسان هستند. توجه کنید که این دو، با حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ متفاوت هستند چون ضریبی از یکدیگر نیستند.

یک سیستم فیزیکی که بعد فضای هیلبرت متناظر آن d باشد، $\dim(\mathcal{H}) = d$ یک کیودیت[۴] نامیده می‌شود. فضای برداری متناظر با یک کیودیت با پایه‌ی متعامد یکه‌ی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |d-1\rangle\}.$$

۲.۱ اصل دوم - تحول زمانی

اصل دوم: تحول زمانی یک سیستم «بسته» با یک عملگر یکانی که روی فضای هیلبرت عمل می کند بیان می شود. یعنی اگر حالت سیستم در زمان t_0 ، $|\psi\rangle$ باشد و در زمان t_1، $|\psi'\rangle$ باشد، آنگاه $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یکانی وجود دارد که $U|\psi\rangle = |\psi'\rangle$. U مستقل از $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ است و فقط به t_0 و t_1 بستگی دارد.

[۱] State
[۲] Qubit
[۳] Global phase
[۴] Qudit

این اصل در واقع فرمول‌بندی دیگری از معادله‌ی شرودینگر است. این معادله تحول زمانی یک سیستم کوانتمی را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle,$$

که در آن $H:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ یک عملگر هرمیتی است که به آن همیلتونی گفته می‌شود. اگر H مستقل از زمان باشد، جواب این معادله‌ی دیفرانسل به صورت زیر است:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}H}|\psi(0)\rangle.$$

حال اگر قرار دهیم

$$U = e^{-\frac{it}{\hbar}H}, \tag{۱}$$

آنگاه $|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle$. ادعا می‌کنیم که U یکانی است، یعنی $U^\dagger U = I = UU^\dagger$. بسط تیلور تابع e^x را در نظر بگیرید: $e^x = \sum_n a_n x^n$ که در آن a_n اعدادی حقیقی هستند.

$$U = \sum_n a_n \left(-\frac{it}{\hbar}H\right)^n$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
U^\dagger &= \left[\sum_n a_n \left(-\frac{it}{\hbar}H\right)^n\right]^\dagger \\
&= \sum_n a_n \left[\left(-\frac{it}{\hbar}H\right)^n\right]^\dagger \\
&= \sum_n a_n \left[\left(-\frac{it}{\hbar}H\right)^\dagger\right]^n \\
&= \sum_n a_n \left(\frac{it}{\hbar}H^\dagger\right)^n \\
&= \sum_n a_n \left(\frac{it}{\hbar}H\right)^n \\
&= e^{\frac{it}{\hbar}H}.
\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از بسط تیلور تابع e^x به راحتی قابل بررسی است که برای دو عملگر نرمال A و B که $AB=BA$ آنگاه

$$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}.$$

با استفاده از این رابطه داریم

$$\Rightarrow U^\dagger U = e^{\frac{it}{\hbar}H}.e^{-\frac{it}{\hbar}H} = e^{(\frac{it}{\hbar}H - \frac{it}{\hbar}H)} = e^0 = I$$

به همین ترتیب $UU^\dagger = I$، و در نتیجه U یکانی است. در حالت کلی‌تر، وقتی که همیلتونی H مستقل از زمان نیست نیز می‌توان نشان داد که $|\psi(0)\rangle$ و $|\psi(t)\rangle$ با یک عملگر یکانی به هم تبدیل می‌شوند.

برعکس، برای هر U یکانی، همیلتونی H وجود دارد به طوری که (۱) برقرار باشد. بنابراین، اصل دوم که تحول زمانی سیستم‌های کوانتمی را با عملگرهای یکانی بیان می‌کند، در واقع فرمول‌بندی دیگری از معادله‌ی شرودینگر است.

مثال: تحول زمانی یک کیوبیت با ماتریس‌های یکانی 2×2 بیان می‌شود.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

X, Z هر دو هم یکانی و هم هرمیتی هستند:

$$X(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|1\rangle + b|0\rangle,$$
$$X^\dagger = X, \qquad X^\dagger X = X^2 = I.$$

$$Z(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle,$$
$$Z^\dagger = Z, \qquad Z^\dagger Z = Z^2 = I.$$

X, Z را ماتریس‌های پاولی[۵] می‌گویند. مثال دیگری از عملگر یکانی ماتریس هادامارد[۶] است.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H^\dagger = H, \quad H^\dagger H = H^2 = I$$

توجه کنید که داریم $H^\dagger X H = Z$ که نتیجه می‌دهد مقادیر ویژه‌ی X و Z یکی هستند. در واقع Z در پایه‌ی استاندارد $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ قطری است و بردارهای ویژه‌ی X برابرند با

$$\{|+\rangle := \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle), \;\; |-\rangle := \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)\},$$

و داریم $H|0\rangle = |+\rangle$، $H|1\rangle = |-\rangle$.

[۵] Pauli matrices
[۶] Hadamard matrix

۳.۱ اصل سوم - اندازه‌گیری

اصل سوم: اندازه‌گیری بر روی یک سیستم با فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با مجموعه‌ای به صورت

$$\{M_i : \quad M_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, i \in S\}$$

مشخص می شود که :

$$\sum_{i \in S} M_i^\dagger M_i = I. \qquad \text{(Completeness)}$$

در این صورت به M_iها عملگرهای اندازه‌گیری[۷] می‌گویند. با انجام این اندازه‌گیری اگر حالت سیستم $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ باشد، حاصل اندازه‌گیری با «احتمال» $p(i) = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$ برابر $i \in S$ می‌شود.
اگر حاصل اندازه گیری $i \in S$ باشد ، حالت سیستم به

$$|\psi'\rangle = \frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}}$$

«تغییر»[۸] می کند.

توجه کنید که $p(i)$ یک توزیع احتمال است:

۱. $p(i)$ نامنفی است چون برابر با نرم بردار $M_i|\psi\rangle$ به توان دو است.

۲. جمع $p(i)$ها یک است که از $\sum M_i^\dagger M_i = I$ نتیجه می شود.

مثال: (اندازه گیری یک کیوبیت) قرار دهید

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|, \qquad M_1 = |1\rangle\langle 1|.$$

در این صورت $M_i^\dagger = M_i$ و

$$M_0^\dagger M_0 = M_0^2 = |0\rangle\langle 0|.|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0| = M_0$$

و همچنین $M_1^\dagger M_1 = M_1$. در نتیجه

$$M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I,$$

[۷] Measurement operators
[۸] Collapse

و $\{M_0, M_1\}$ یک اندازه‌گیری است. برای $|\psi\rangle = a|0\rangle| + b|1\rangle$ داریم

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle = |\langle\psi|0\rangle|^2 = |a|^2,$$
$$p(1) = |b|^2.$$

حال اگر حاصل اندازه گیری 0 باشد حالت سیستم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$M_0|\psi\rangle = |0\rangle\langle 0|(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle \sim |0\rangle$$

و اگر حاصل اندازه گیری 1 باشد سیستم به $|1\rangle$ تغییر پیدا می کند.

مثال: (اندازه گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه) اگر $\dim\mathcal{H} = d$ و $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, \cdots, |v_{d-1}\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه باشد، برای $M_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ داریم:

$$\sum M_i^\dagger M_i = \sum |v_i\rangle\langle v_i| = I.$$

پس $\{M_0, \ldots, M_{d-1}\}$ یک اندازه‌گیری است. اگر $|\psi\rangle = \sum_i a_i|v_i\rangle$ آنگاه

$$p(i) = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = |a_i|^2.$$

به این اندازه‌گیری، اندازه‌گیری در پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, \cdots, |v_{d-1}\rangle\}$ می‌گویند.

مثال: برای بردارهای $|+\rangle$ و $|-\rangle$ که در بالا تعریف شدند، قرار دهید

$$M_0 = |+\rangle\langle 0|, \quad M_1 = |-\rangle\langle 1|.$$

$$M_0^\dagger = |0\rangle\langle +| \Rightarrow M_0^\dagger M_0 = |0\rangle\langle +|+\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|,$$

و به همین ترتیب $M_1^\dagger M_1 = |1\rangle\langle 1|$. پس $M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = I$.

$$p(0) = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = |\langle 0|+\rangle|^2 = |a|^2$$
$$p(1) = |b|^2$$

اگر حاصل اندازه گیری 0 باشد، تغییر حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$M_0|\psi\rangle = |+\rangle\langle 0|(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|+\rangle \sim |+\rangle.$$

مثال: (اندازه‌گیری تصویری[۹]) فرض کنید عملگرهای $\{P_i : \quad i \in S\}$ همگی تصویر عمود باشند، یعنی

$$P_i^\dagger = P_i, \quad P_i^2 = P_i,$$

[۹] Projective measurement

و داشته باشیم

$$\sum P_i = I.$$

در این صورت $\{P_i : \quad i \in S\}$ یک اندازه‌گیری است زیرا

$$\sum_i P_i^\dagger P_i = \sum_i P_i^2 = \sum_i P_i = I.$$

به چنین اندازه‌گیری‌ای، اندازه‌گیری تصویری می‌گویند. اندازه‌گیری در یک پایه‌ی متعامد یکه حالت خاصی از اندازه‌گیری تصویری است.

توجه کنید که در یک اندازه گیری تصویری برای $i \neq j$ می‌توان نشان داد $P_i P_j = 0$. در واقع اگر برد[۱۰] P_i را با W_i نشان دهیم آنگاه $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in S} W_i$ افراز فضا به زیرفضاهای عمود بر هم است.

مثال: یک کمیت[۱۱] فیزیکی با یک عملگر هرمیتی روی فضای هیلبرت مشخص می‌شود:

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad A^\dagger = A.$$

مثلاً همیلتونی عملگر متناظر با کمیت انرژی است. از آنجا که A هرمیتی است، در یک پایه‌ی متعامد یکه قطری می‌شود. در واقع اگر $\lambda_i \in \mathbb{R}$ها مقادیر ویژه‌ی A، W_i زیر فضای تولید شده توسط بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_i باشند، و P_i را عملگر تصویر عمود بر روی این زیر فضا بگیریم، آنگاه

$$A = \sum_i \lambda_i P_i,$$

و از آنجا که بردارهای ویژه‌ی A کل $\mathcal{H}$ را می‌پوشانند داریم $\sum_i P_i = I$. پس می‌توانیم اندازه‌گیری تصویری $\{P_i\}$ را در نظر بگیریم.

اگر حالت $|\psi\rangle$ را با $\{P_i\}$ اندازه‌گیری کنیم و حاصل اندازه‌گیری i باشد، آنگاه می‌گوییم مقدار کمیت A برابر λ_i است. در این صورت متوسط (امید ریاضی) این کمیت که با $\langle A\rangle$ نمایش داده می‌شود برابر است با

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \sum_i \lambda_i p(i) = \sum_i \lambda_i \langle\psi|P_i|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi|\left(\sum_i \lambda_i P_i\right)|\psi_i\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle.\end{aligned}$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ[۱۲]

[۱۰] Image
[۱۱] Observable
[۱۲] Heisenberg uncertainty principle

برای کمیت‌های A, B داریم

$$(\Delta A).(\Delta B) \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B] \rangle|,$$

که در آن

$$(\Delta A)^2 := \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \quad [A,B] := AB - BA.$$

برای جزییات بیشتر به صفحه ۸۹ کتاب مرجع مراجعه کنید.

۴.۱ اصل چهارم - سیستم های ترکیبی

اصل چهارم: فضای هیلبرت متناظر با یک سیستم فیزیکی که متشکل از n سیستم کوچکتر[۱۳] است از ضرب تانسوری فضاهای کوچک‌تر بدست می آید.
به عبارت دیگر اگر فضای هیلبرت متناظر با سیستم i-ام، $\mathcal{H}_i$ باشد، فضای هیلبرت متناظر با کل n سیستم برابر است با

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n.$$

اگر سیستم i-ام در حالت $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ باشد، کل سیستم در حالت $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle$ است.

[۱۳] Subsystem